

FILIERE HUMANITES GENERALES

Préparation au test d'admission de
Mathématiques

Algèbre & Géométrie - Compléments

HG 1 - HG 2 - HG 3

Généralités.....	3
1.Vocabulaire.....	3
2.Mise en évidence - factorisation.....	3
3.Formules remarquables de développement.....	3
4.Formules remarquables de factorisation.....	3
Les polynômes.....	4
1.Définition et propriétés.....	4
2.Division de polynômes par $x-a$: méthode générale.....	4
3.Division de polynômes par $(x-a)$ grâce à la méthode de Horner.....	4
4.Comment trouver le ou les diviseur(s) d'un polynôme ?.....	5
Les fractions.....	6
1.Rappel.....	6
1.Règles de simplification des fractions.....	6
2.Addition et soustraction de fractions.....	6
Les radicaux.....	7
Valeur absolue d'un nombre réel.....	7
Les équations du 1er degré type $ax+b = 0$	9
1.Les équations « simples » du 1er degré à 1 inconnue.....	9
2.Equation avec dénominateur contenant l'inconnue.....	9
3.Equation se décomposant en plusieurs équations du 1er degré.....	9
4.Résolution de problèmes pratiques.....	10
5.Résolution graphique d'une équation du 1er degré à une inconnue.....	11
6.Les systèmes d'équations du 1er degré à plusieurs inconnues.....	11
Les équations du second degré de type $ax^2+bx+c=0$	12
1.Calcul du « Delta » Δ	12
2.Equations réductibles au second degré : les équations bicarrées.....	12
3.Equations réductibles au second degré :les équations irrationnelles.....	13
4.Résolution graphique d'une équation du second degré $ax^2+bx+c=0$	13
Les inéquations du 1er degré type $ax+b>0$	14
1.Règle pratique de résolution.....	14
2.Exemple1 : attention au changement de sens de l'inégalité !!!.....	14
3.Exemple 2 : représenter les solutions sur la droite réelle avec des couleurs.....	14
4.Etude du signe de $ax+b$: pour quelles valeurs de x est-il <0 , $=0$, >0 ?.....	15
5.Inéquation avec valeur absolue.....	15
6.Equation avec valeur absolue : une inéquation cachée avec étude de signe !!!.....	15
Les inéquations du 2d degré type $ax^2+bx+c>0$	17
1.Etude du signe de ax^2+bx+c : pour quelles valeurs de x est-il <0 , $=0$, >0 ?.....	17
2.Inéquation du second degré avec le trinôme du second degré ax^2+bx+c	17
3.Inéquation avec expression algébrique.....	18
Représentation graphique d'une fonction.....	19
1.Graphique d'une fonction.....	19
2.Graphique d'une fonction du 1er degré type $y=ax+b$ ou $x=c$	19
3.Graphique de la fonction du 2d degré type $y= ax^2+bx+c$	20
4.Graphique d'une fonction avec une valeur absolue.....	21
5.Graphique de fonctions non linéaires.....	21
Notion de vecteur.....	22
1.Définition.....	22
2.Somme de deux vecteurs.....	22
3.Multipliation scalaire d'un vecteur.....	22
4.Repère - Composantes d'un vecteur.....	23
Exercices avec solutions.....	25

Prérequis au cours de HG4

Généralités

1. Vocabulaire

1) l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres naturels (entiers positifs) :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

2) l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers (positifs et négatifs) :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

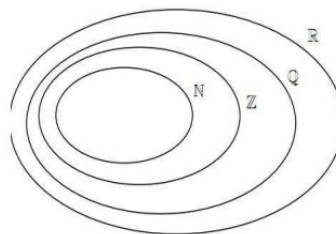
3) l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels (fractions à termes entiers) :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}_0 \right\}^1$$

4) l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels (nombres rationnels et irrationnels, tels que, par exemple : $\pi, \sqrt{3}, -\sqrt{2}, \dots$).

Nous avons les inclusions suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$



2. Mise en évidence - factorisation

$$ab + ac = a \cdot (b + c)$$

$$ab - ac + ad = a \cdot (b - c + d)$$

$$-ab - ac + ad = -a \cdot (b + c - d)$$

3. Formules remarquables de développement

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

produit de deux binômes conjugués

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

carré d'une somme

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

carré d'une différence

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

cube d'une somme

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

cube d'une différence

4. Formules remarquables de factorisation

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

différence de deux carrés

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

différence de deux cubes

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

somme de deux cubes

Les polynômes

1. Définition et propriétés

- On appelle **fonction polynôme de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$** toute fonction f de la forme :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

(où $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$ et $a_0 \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$)

- Par extension, l'expression algébrique $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ est appelée **polynôme en x sur $\mathbb{R}$** .
- Les réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$ et a_0 sont les **coefficients** du polynôme.
- L'exposant de la plus haute puissance de x (ici, n) est le **degré** du polynôme.
- Le coefficient a_0 est aussi appelé **terme indépendant**.

Exemple 1

$$3x^4 - 2x^3 + 7x - 1$$

- est un polynôme de degré 4 ;
- ses coefficients sont 3, -2, 0, 7 et -1 ;
↘ car il ne contient pas de terme en x^2
- son terme indépendant est -1.

Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients respectifs sont égaux.

2. Division de polynômes par $x-a$: méthode générale

Exemple : divisons $4x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ par $x - 2$.

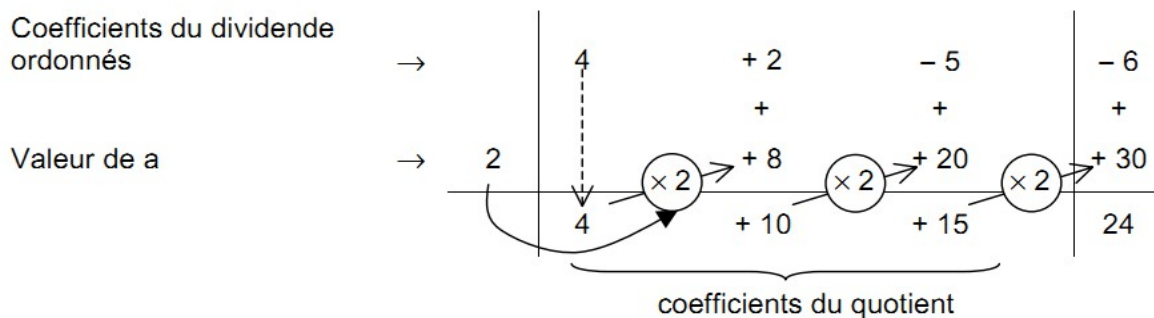
$4x^3 + 2x^2 - 5x - 6$	$x - 2$
$- 4x^3 + 8x^2$	$4x^2 + 10x + 15$
$+ 10x^2 - 5x - 6$	
$- 10x^2 + 20x$	
$+ 15x - 6$	
$- 15x + 30$	
24	

$= \text{reste}$

3. Division de polynômes par $(x-a)$ grâce à la méthode de Horner

Nous venons de calculer, selon la méthode "générale" de la division d'un polynôme par un polynôme, le quotient et le reste de $(4x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x - 2)$.

- Le reste est 24, ce que nous pouvions trouver en calculant $f(2)$.
- Les coefficients du quotient peuvent se calculer également en utilisant une autre "technique", appelée la technique de Horner.



Le quotient de la division de $4x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ par $x - 2$ est donc bien $4x^2 + 10x + 15$ et le reste vaut 24

4. Comment trouver le ou les diviseur(s) d'un polynôme ?

Si un polynôme à coefficients entiers est divisible par $x - a$ (avec a entier), alors a divise le terme indépendant du polynôme.

En pratique :

les valeurs entières de a pour lesquelles $x - a$ est un diviseur du polynôme seront recherchées parmi les nombres qui divisent le terme indépendant.

Exemple

Soit le polynôme $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x - 2$.

L'ensemble des diviseurs de -2 est : $\{1, -1, 2, -2\}$.

Calculons :

$$\begin{aligned}
 f(1) &= 1^3 + 4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 6 \neq 0 & \Rightarrow f(x) \text{ n'est pas divisible par } x - 1 \\
 f(-1) &= (-1)^3 + 4 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 2 = -2 \neq 0 & \Rightarrow f(x) \text{ n'est pas divisible par } x + 1 \\
 f(2) &= 2^3 + 4 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 2 = 28 \neq 0 & \Rightarrow f(x) \text{ n'est pas divisible par } x - 2 \\
 f(-2) &= (-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 2 = 0 & \Rightarrow f(x) \text{ est divisible par } x + 2.
 \end{aligned}$$

Recherchons maintenant le quotient de la division de $f(x)$ par $x + 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 4 & 3 & -2 \\
-2 & & -2 & -4 & 2 \\
\hline
 & 1 & 2 & -1 & 0
 \end{array}$$

Le quotient cherché est $x^2 + 2x - 1$.

Nous avons donc la décomposition en facteurs suivante :

$$x^3 + 4x^2 + 3x - 2 = (x + 2)(x^2 + 2x - 1).$$

Les fractions

1. Rappel

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}_0 :$$

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

$$\forall a, c \in \mathbb{R}, \forall b, d \in \mathbb{R}_0 :$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

(le produit des moyens est égal au produit des extrêmes ou "produits en croix")

1. Règles de simplification des fractions

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b, c \in \mathbb{R}_0 :$$

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \quad \left| \quad \frac{ac}{c} = a \quad \left| \quad \frac{c}{bc} = \frac{1}{b} \right. \right.$$

La simplification d'une fraction n'est possible que si le numérateur et le dénominateur sont des **produits** et contiennent un **facteur commun**. Il est donc nécessaire de **factoriser** le numérateur et le dénominateur.

Exemple : simplifions $\frac{7a^3x + 7ax^3}{a^4 - x^4}$.

Factorisons le numérateur : $7a^3x + 7ax^3 = 7ax(a^2 + x^2)$

et le dénominateur : $a^4 - x^4 = (a^2 - x^2)(a^2 + x^2)$
 $= (a - x)(a + x)(a^2 + x^2)$

$$\begin{aligned} \text{Nous avons donc : } \frac{7a^3x + 7ax^3}{a^4 - x^4} &= \frac{7ax(a^2 + x^2)}{(a - x)(a + x)(a^2 + x^2)} \\ &= \frac{7ax \cancel{(a^2 + x^2)}^1}{(a - x)(a + x) \cancel{(a^2 + x^2)}_1} \\ &= \frac{7ax}{(a - x)(a + x)} \end{aligned}$$

Fraction rationnelle

Numérateur ET dénominateur est un polynôme

2. Addition et soustraction de fractions

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}_0 :$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \left| \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c} \right.$$

$$\forall a, c \in \mathbb{R}, \forall b, d \in \mathbb{R}_0 :$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \left| \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} \right.$$

Les radicaux

$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \forall p, q \in \mathbb{Q} :$

• $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$	• $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
• $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$	• $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
	• $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

Exemple 1

$$\begin{aligned}
 \frac{a^2}{\sqrt[3]{a^2}} &= \frac{a^2}{a^{\frac{2}{3}}} && \text{par définition} \\
 &= a^{2-\frac{2}{3}} && \text{quotient de deux puissances d'un même nombre} \\
 &= a^{\frac{6-2}{3}} = a^{\frac{4}{3}} \\
 &= \sqrt[3]{a^4} && \text{par définition} \\
 &= a\sqrt[3]{a} && \text{simplification}
 \end{aligned}$$

Exemple 2

radical d'indice **impair** d'un réel négatif : défini

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \quad \text{car} \quad (-2)^3 = -8$$

Remarque : les nombres complexes

radical d'indice **pair** d'un réel négatif

$\sqrt{-1}$ n'existe pas ... on l'a donc inventé et noté « i » !!!

On a posé $i^2 = -1$ pour pouvoir définir des solutions à toutes les équations polynomiales à coefficients réels : par exemple l'équation $x^2 + 1 = 0$ qui n'admet aucune solution réelle mais 2 solutions imaginaires $\{-i, i\}$. On peut voir les nombres complexes $\mathbb{C}$ comme une extension de l'ensemble des nombres réels : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Ces nombres ont été introduits dans les calculs dès le XVI^e siècle.

Valeur absolue d'un nombre réel

La valeur absolue d'un nombre réel x

- est égale à x si x est positif,
- est égale à $-x$ si x est négatif.

Elle se note : $|x|$.

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemples : $|4| = 4$; $|-3| = 3$; $|0| = 0$; $|-0,5| = 0,5$.

La valeur absolue de x peut aussi être définie par la racine carrée de x^2 :

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

En effet : si $x = 2$, $\sqrt{x^2} = \sqrt{4} = 2 = |2|$,

si $x = -2$, $\sqrt{x^2} = \sqrt{4} = 2 = |-2|$.

Remarque 1

On peut démontrer que

$$|x-y| = |y-x|$$

Exemple : $|3-5| = |-2| = 2 = |5-3|$

Cela pourra servir dans les équations avec valeur absolue.

Remarque 2

Ce qui va beaucoup servir dans la suite est de retenir que

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2} &= x \text{ si } x > 0 \\ \sqrt{x^2} &= -x \text{ si } x < 0 \end{aligned}$$

Très important !!!!

x	-5	-3	-2	-1	0	1	2	3	5
$\sqrt{x^2}$	5	3	2	1	0	1	2	3	5

Les équations du 1er degré type $ax+b = 0$

1. Les équations « simples » du 1er degré à 1 inconnue

Exemple 1 :

$$2x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2 \quad \text{Sol} = \{-2\}$$

Exemple 2 :

$$\begin{aligned} \frac{x - (4 - x)}{2} = x - 2 &\Leftrightarrow \frac{x - 4 + x}{2} = \frac{2x - 4}{2} \\ &\Leftrightarrow x - 4 + x = 2x - 4 \\ &\Leftrightarrow 0x = 0 \end{aligned} \quad \text{Sol} = \mathbb{R}$$

Exemple 3 :

$$\begin{aligned} x - \frac{x}{2} + 5 = \frac{x - 2}{2} &\Leftrightarrow \frac{2x - x + 10}{2} = \frac{x - 2}{2} \\ &\Leftrightarrow x + 10 = x - 2 \\ &\Leftrightarrow 0x = -12 \end{aligned} \quad \text{Sol} = \emptyset$$

2. Equation avec dénominateur contenant l'inconnue

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{x}{x-2} &\Leftrightarrow \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x(x-2)} - \frac{x}{x-2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)+1-x^2}{x(x-2)} = 0 \\ \text{DC : } x(x-2) & \\ \text{Conditions d'existence : } x \neq 0 \text{ et } x \neq 2 & \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x - x + 2 + 1 - x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -3x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \rightarrow \text{solution acceptée} \end{aligned} \quad \text{Sol} = \{1\}$$

Attention Condition d'existence !!!

3. Equation se décomposant en plusieurs équations du 1er degré

$$\begin{aligned} -3x^3 + 3x &= -2x^2 + 2 \\ \Leftrightarrow -3x^3 + 3x + 2x^2 - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -3x(x^2 - 1) + 2(x^2 - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 1)(-3x + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(-3x + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad -3x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Penser à factoriser!

Cette équation possède donc 3 solutions.

Nous écrirons : $\text{Sol} = \left\{ -1, 1, \frac{2}{3} \right\}$.

4. Résolution de problèmes pratiques

N'oubliez pas :

On distingue 4 parties dans la résolution algébrique d'un problème :

- 1) le choix de l'inconnue
- 2) la mise en équation du problème
- 3) la résolution de cette équation
- 4) la solution du problème.

Exemple

Une personne parcourt une certaine distance en faisant les $\frac{5}{6}$ du trajet en tram à la vitesse de 25 km/h et le reste à pied à la vitesse de 5 km/h. Quelle est la distance parcourue, s'il a fallu 40 minutes pour effectuer le trajet ?

1) **Choix de l'inconnue** : soit x la distance parcourue, en km.

2) **Mise en équation** :

distance parcourue en tram : $\frac{5x}{6}$;

durée du trajet en tram : $\frac{\frac{5x}{6}}{25} = \frac{5x}{6 \cdot 25} = \frac{x}{30}$ (en heures) ;

(en effet : vitesse = $\frac{\text{distance}}{\text{temps}}$, donc temps = $\frac{\text{distance}}{\text{vitesse}}$) ;

distance parcourue à pied : $\frac{x}{6}$;

durée du trajet à pied : $\frac{\frac{x}{6}}{5} = \frac{x}{30}$ (en heures) ;

durée totale du trajet : $\frac{x}{30} + \frac{x}{30}$;

Cette durée est de 40 minutes, donc $\frac{2}{3}$ heure. Nous avons donc l'équation :

$$\frac{x}{30} + \frac{x}{30} = \frac{2}{3}$$

3) **Résolution de l'équation** : $\frac{2x}{30} = \frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{10} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 10$$

4) **Solution du problème** : la personne a parcouru **10 km**.

INTERPRETER SES RESULTATS

Attention !!! Il faut parfois écarter des solutions trouvées par résolution algébrique mais absurdes dans la réalité
Il faut donc confronter le calcul avec la réalité du problème !!!

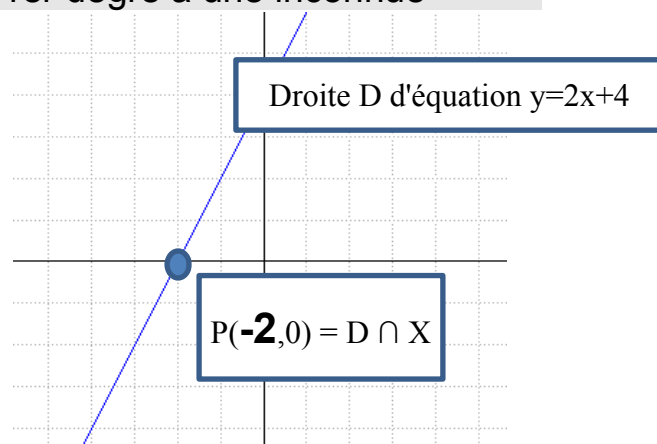
5. Résolution graphique d'une équation du 1er degré à une inconnue

Dans le cas de de l'exemple : $2x + 4 = 0$

$$\text{Sol} = \{-2\}$$

On peut représenter cela graphiquement

Les couples de points du plan de coordonnées (x, y) tels que $y = 2x + 4$ représentent une droite D d'équation $y = 2x + 4$ et le point $P(-2, 0)$ est l'intersection de la droite D avec l'axe des X.



6. Les systèmes d'équations du 1er degré à plusieurs inconnues

On résout algébriquement un système d'équations du 1er degré (linéaires) en les combinant linéairement entre elles

Le système de deux équations peut être représenté par deux droites.

Le **point d'intersection éventuel** de ces deux droites a une coordonnée qui vérifie à la fois chacune des deux équations : cette coordonnée est donc la **solution** du système donné.

Exemple

Soit le système d'équations

$$\begin{cases} y = -2x + 5 & (1) \\ y = 3x - 5 & (2) \end{cases}$$

1. Résolvons ce système algébriquement :

$$\begin{cases} y = -2x + 5 & (1) \\ y = 3x - 5 & (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 0 = -5x + 10 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{Remplaçons dans (1)} \Rightarrow y = -4 + 5 \Rightarrow y = 1$$

A. Représentons graphiquement ces deux équations :

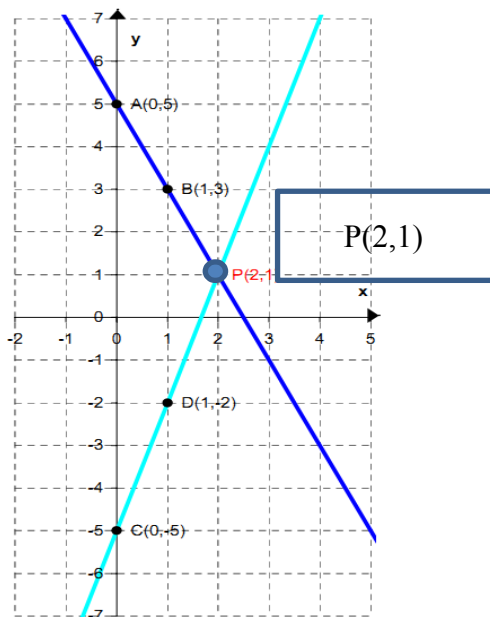
Deux points de (1) :

x	0	1
y	5	3

Deux points de (2) :

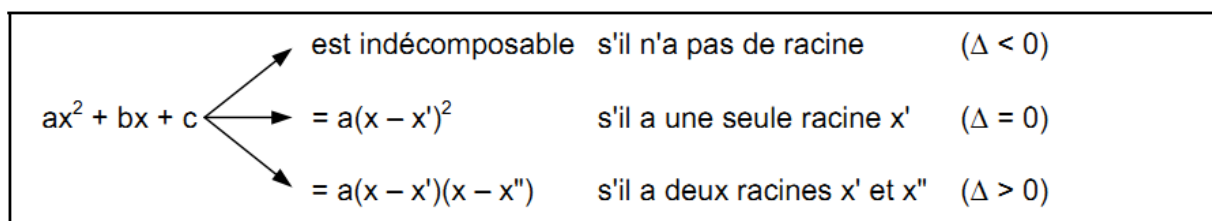
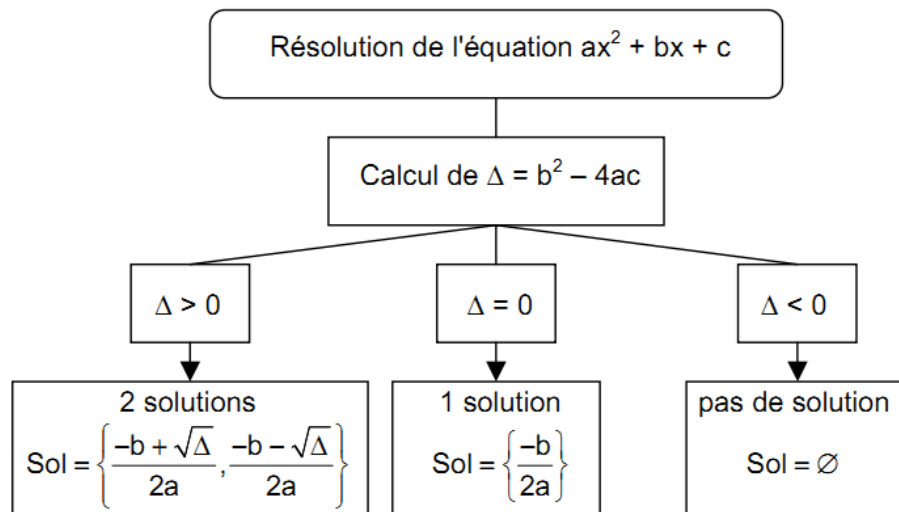
x	0	1
y	-5	-2

Vous constatez que ces deux droites se coupent au point $P(2, 1)$.



Les équations du second degré de type $ax^2+bx+c=0$

1. Calcul du « Delta » Δ



2. Equations réductibles au second degré : les équations bicarrées

$$4x^4 - 25x^2 + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 - 25y + 36 = 0 & (1) \\ x^2 = y & (2) \end{cases}$$

on pose $x^2=y$ puis on calcule le Δ

Solution de (1) : $\Delta = (-25)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 36 = 625 - 576 = 49$

D'où : $y' = \frac{25 + \sqrt{49}}{2 \cdot 4} = \frac{25 + 7}{8} = 4$

$y'' = \frac{25 - \sqrt{49}}{2 \cdot 4} = \frac{25 - 7}{8} = \frac{9}{4}$

L'équation (2) devient alors : $x^2 = 4$ ou $x^2 = \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow x' = 2, x'' = -2$ ou $x''' = \frac{3}{2}, x^{iv} = -\frac{3}{2}$

On a finalement 4 solutions : $Sol = \left\{ -2, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2 \right\}$

3. Equations réductibles au second degré : les équations irrationnelles

On transforme l'équation initiale dans le but de faire disparaître les racines :

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+3} + x &= 6 & (1) \\ \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} &= 6-x \\ * \Rightarrow 2x+3 &= (6-x)^2 \\ \Leftrightarrow 2x+3 &= 36-12x+x^2 \\ \Leftrightarrow x^2-14x+33 &= 0 & (2) \end{aligned}$$

Implication non réversible !!!

Il faut vérifier si les solutions de 2 vérifient 1

Si $x = 11$: (1) devient : $\sqrt{2 \cdot 11 + 3} + 11 = 6$

$$\Leftrightarrow \sqrt{25} + 11 = 6$$

$$\Leftrightarrow 5 + 11 = 6, \text{ ce qui est faux.}$$

si $x = 3$: (1) devient : $\sqrt{6+3} + 3 = 6$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9} + 3 = 6$$

$$\Leftrightarrow 3 + 3 = 6, \text{ ce qui est vrai.}$$

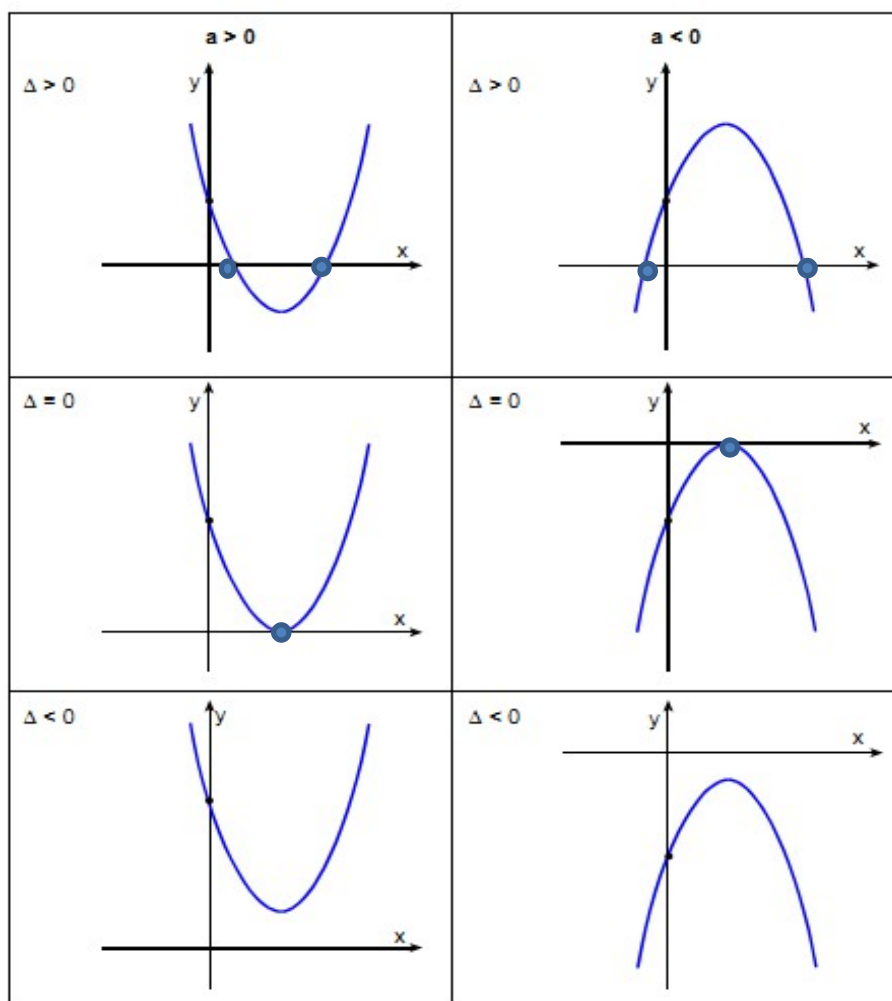
Finalement : **Sol = {3}**. (on a dû rejeter 11 qui vérifie (2) mais pas (1))

4. Résolution graphique d'une équation du second degré $ax^2+bx+c=0$

L'ensemble des points $p(x,y)$ tels que $y = ax^2+bx+c$ est une parabole P.

Les points (x,y) tels que $ax^2+bx+c=0$ sont $P \cap X$

Cette parabole coupe ou non l'axe des X selon la valeur de Δ



Les inéquations du 1er degré type $ax+b>0$

1. Règle pratique de résolution

- Une inégalité **ne change pas de sens** si :
 - on ajoute ou on soustrait un même nombre aux deux membres,
 - on multiplie ou on divise les deux membres par un même nombre **positif**.
- Une inégalité **change de sens** si :
 - on multiplie ou on divise les deux membres par un même nombre **négatif**.

2. Exemple 1 : attention au changement de sens de l'inégalité !!!

Réolvons l'inéquation $3x - 7 < 6x + 2$

$$\Leftrightarrow 3x - 6x < 2 + 7$$

$$\Leftrightarrow -3x < 9$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{9}{-3}$$

$$\Leftrightarrow x > -3$$

PAS de changement de sens avec +7

Changement de sens avec $x(-1/3)$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc : $\text{Sol} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$,

c'est-à-dire que sont solutions de l'inéquation tous les réels supérieurs à -3 .

3. Exemple 2 : représenter les solutions sur la droite réelle avec des couleurs

$$\frac{x-3}{4} + \frac{2x-5}{5} < 1-3x$$

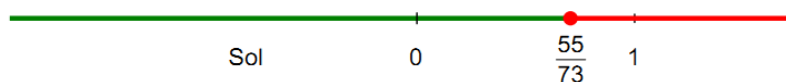
$$\Leftrightarrow 5(x-3) + 4(2x-5) < 20(1-3x)$$

$$\Leftrightarrow 5x - 15 + 8x - 20 < 20 - 60x$$

$$\Leftrightarrow 5x + 8x + 60x < 20 + 15 + 20$$

$$\Leftrightarrow 73x < 55$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{55}{73} \quad \text{D'où : } \text{Sol} = \left] -\infty, \frac{55}{73} \right[$$



Il est intéressant de dessiner :

- en **vert** : les valeurs de x qui **appartiennent** à l'intervalle;
- en **rouge** : les valeurs de x qui **n'appartiennent pas** à l'intervalle.

4. Etude du signe de $ax+b$: pour quelles valeurs de x est-il <0 , $=0$, >0 ?

si $a > 0$	x	$-\frac{b}{a}$		
	$ax + b$	-	0	+

si $a < 0$	x	$-\frac{b}{a}$		
	$ax + b$	+	0	-

5. Inéquation avec valeur absolue

Exemple 1

$$|x - 2| < 0,1 \Leftrightarrow 2 - 0,1 < x < 2 + 0,1 \Leftrightarrow 1,9 < x < 2,1$$

$$\text{Sol} =]1,9 ; 2,1[$$

Exemple 2

$$|4 - 3x| \leq 2 \Leftrightarrow |3x - 4| \leq 2 \quad (\text{car } |4 - 3x| = |3x - 4|)$$

$$\Leftrightarrow 4 - 2 \leq 3x \leq 4 + 2$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq 3x \leq 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq 2$$

$$\text{Sol} = \left[\frac{2}{3}, 2 \right].$$

6. Equation avec valeur absolue : une inéquation cachée avec étude de signe !!!

Il faut se débarrasser absolument des valeurs absolues en étudiant le signe de l'expression.

Exemple :

$$\text{Soit } |x - 1| - |x + 2| = x + 1 \quad (E).$$

Les valeurs de $|x - 1|$ et $|x + 2|$ dépendent des signes de $x - 1$ et $x + 2$.

Étudions ces signes :

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

x	-2			1	
$x - 1$	-	-	-	0	+
$x + 2$	-	0	+	+	+

Attention ! Ici, il ne s'agit pas de faire le "produit" des signes, mais de remarquer que **3 cas** sont à considérer :

1^{er} cas : $x \leq -2$, ou $x \in]-\infty, -2]$

• $x - 1$ est négatif, donc $|x - 1| = -(x - 1)$

• $x + 2$ est négatif, donc $|x + 2| = -(x + 2)$

et l'équation (E) devient :

$$-(x - 1) + (x + 2) = x + 1$$

$$\Leftrightarrow -x + 1 + x + 2 = x + 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

2 n'appartient pas à l'intervalle $]-\infty, -2]$: il n'y a pas de solution dans ce cas.

2^{ème} cas : $-2 < x \leq 1$, ou $x \in]-2, 1]$

- $x - 1$ est négatif, donc $|x - 1| = -(x - 1)$
- $x + 2$ est positif, donc $|x + 2| = x + 2$

et l'équation (E) devient :

$$-(x - 1) - (x + 2) = x + 1$$

$$\Leftrightarrow -x + 1 - x - 2 = x + 1$$

$$\Leftrightarrow 3x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$-\frac{2}{3}$ appartient à l'intervalle $] -2, 1]$: c'est, dans ce cas, la solution.

3^{ème} cas : $x > 1$, ou $x \in]1, +\infty[$

- $x - 1$ est positif, donc $|x - 1| = x - 1$
- $x + 2$ est positif, donc $|x + 2| = x + 2$

et l'équation (E) devient :

$$x - 1 - (x + 2) = x + 1$$

$$\Leftrightarrow x - 1 - x - 2 = x + 1$$

$$\Leftrightarrow x = -4$$

-4 n'appartient pas à l'intervalle $]1, +\infty[$: il n'y a pas de solution dans ce cas.

En conclusion, l'équation (E) possède une seule solution.

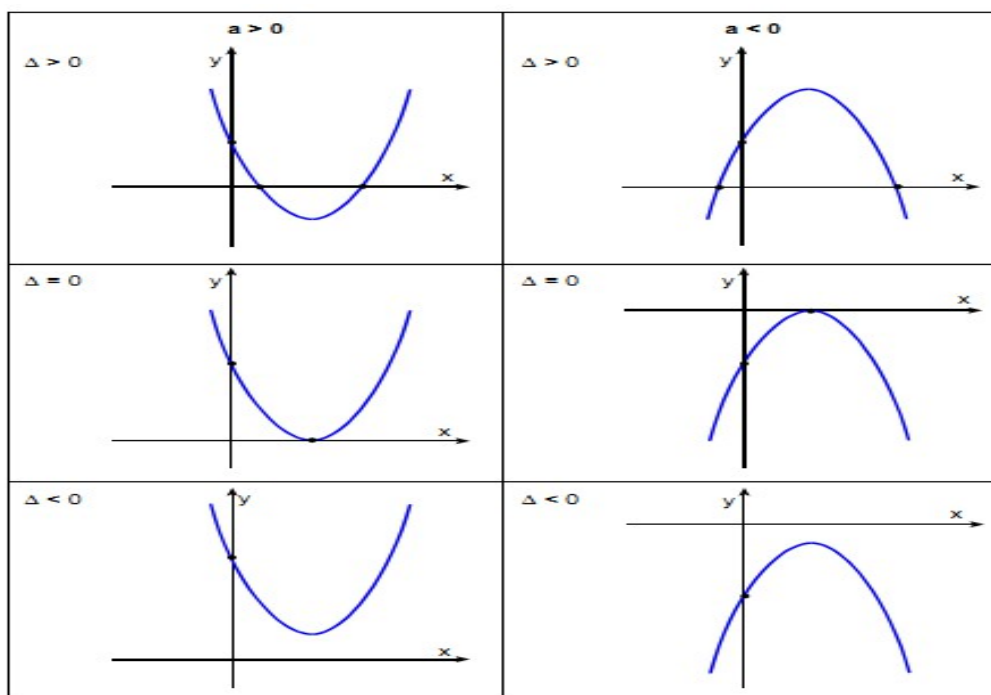
$$\text{Sol} = \left\{ -\frac{2}{3} \right\}.$$

Les inéquations du 2d degré type $ax^2+bx+c>0$

1. Etude du signe de ax^2+bx+c : pour quelles valeurs de x est-il <0 , $=0$, >0 ?

Règle du signe de $ax^2 + bx + c$

$ax^2 + bx + c$ a toujours le signe de a , sauf pour les valeurs de x comprises entre les deux racines éventuelles.



2. Inéquation du second degré avec le trinôme du second degré ax^2+bx+c

Réolvons l'inéquation $2 - x > x^2$

Groupons tous les termes dans le 1^{er} membre :

$$-x^2 - x + 2 > 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 1 + 8 = 9$$

$$2 \text{ racines : } x' = \frac{1 + \sqrt{9}}{-2} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$x'' = \frac{1 - \sqrt{9}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Établissons le tableau de signes :

x		-2		1	
$-x^2 - x + 2$	$-$	0	$+$	0	$-$

Sont solutions de l'inéquation donnée les valeurs de x pour lesquelles le trinôme est positif ($-x^2 - x + 2 > 0$). D'où :

$$\boxed{\text{Sol} =]-2, 1[}$$

3. Inéquation avec expression algébrique

Exemple 1 :

$$\frac{(x+1)(3-x)}{-x+2} \geq 0$$

est une inéquation qui se « présente » bien (on a déjà factorisé),
on doit « juste » faire le tableau des signes et en déduire les solutions.

x		-1		2		3	
x+1	-	0	+	+	+	+	+
-x+3 (= 3-x)	+	+	+	+	+	0	-
-x+2	+	+	+	0	-	-	-
$\frac{(x+1)(3-x)}{-x+2}$	-	0	+	X	-	0	+

La dernière ligne s'obtient par application de la règle des signes.

Le symbole X signifie que l'expression n'existe pas (ici, pour x = 2, puisque le dénominateur est égal à 0).

$$\text{Sol} = [-1, 2[\cup [3, +\infty[.$$

Exemple 2 :

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x+2} + \frac{1}{1-x}$$

Expression ne permettant **PAS** de faire un tableau de signe

est une inéquation dans laquelle il faut d'abord ramener tout dans un membre puis factoriser. Ensuite on fait le tableau des signes et on déduit les solutions

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x+2} + \frac{1}{1-x} &\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{1-x} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+2)(1-x) - (x+1)(1-x) - (x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(1-x)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x-x^2+2-2x - (x+1-x^2-x) - (x^2+2x+x+2)}{(x+1)(x+2)(1-x)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-x^2-4x-1}{(x+1)(x+2)(1-x)} \leq 0 \end{aligned}$$

Expression équivalente permettant de faire un tableau de signe

racines de $-x^2 - 4x - 1$: $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 16 - 4 = 12 > 0$

$$x' = \frac{4 + \sqrt{12}}{2 \cdot (-1)} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}$$

$$x'' = \frac{4 - \sqrt{12}}{2 \cdot (-1)} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{-2} = -2 + \sqrt{3}$$

x		$-2 - \sqrt{3}$		-2		-1		$-2 + \sqrt{3}$		1	
$-x^2 - 4x - 1$	-	0	+	+	+	+	+	0	-	-	-
x+1	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+
x+2	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+
1-x	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	-
$\frac{-x^2-4x-1}{(x+1)(x+2)(1-x)}$	-	0	+	X	-	X	+	0	-	X	+

L'expression doit être négative ou nulle, donc :

$$\text{Sol} =]-\infty, -2 - \sqrt{3}] \cup]-2, -1[\cup [2 + \sqrt{3}, 1[$$

$$\text{Sol} =]-\infty, -2 - \sqrt{3}] \cup]-2, -1[\cup [2 + \sqrt{3}, 1[$$

Représentation graphique d'une fonction

1. Graphique d'une fonction

Le graphique d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$ dans un plan muni d'un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Si nous posons $y = f(x)$, le graphique de f est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) .

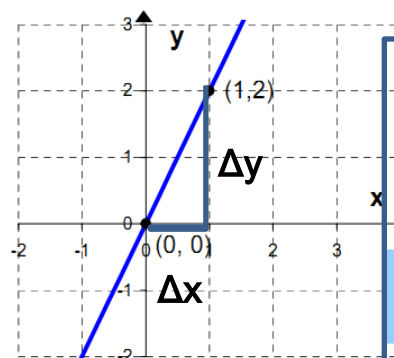
2. Graphique d'une fonction du 1er degré type $y=ax+b$ ou $x=c$

1) $f : x \rightarrow 2x$

Recherchons deux points :

x	0	1
$f(x) = 2x = y$	0	2

C'est une droite passant par l'origine (des axes).



Droite d'équation $y=2x$

$$\text{Pente} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \frac{2-0}{1-0} \equiv 2$$

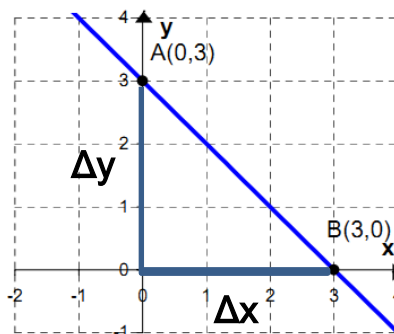
Pente positive
on « monte »

2) $f : x \rightarrow -x + 3$

Recherchons deux points :

x	0	3
$f(x) = -x + 3 = y$	3	0

Ces 2 points sont situés sur les axes.



Droite d'équation $y = -x + 3$

$$\text{Pente} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \frac{0-3}{3-0} \equiv -1$$

Pente négative
on « descend »

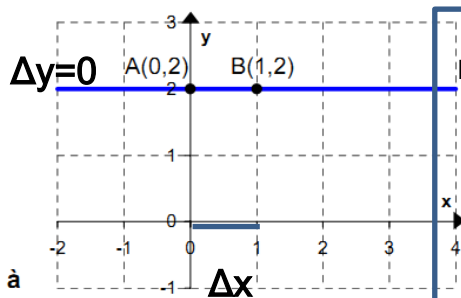
3) $f : x \rightarrow 2$

Recherchons deux points :

x	0	1
$f(x) = 2 = y$	2	2

Cette fonction est **constante** : $y = 2$,
quelle que soit la valeur de x .

Le graphique est une droite **parallèle à Ox**.



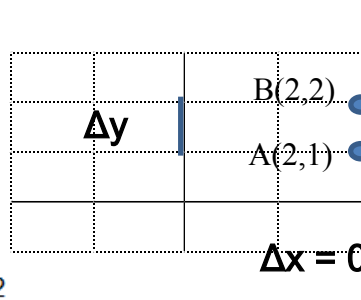
Droite d'équation $y = 0x + 2$

$$\text{Pente} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \frac{2-2}{1-0} \equiv 0$$

Pente nulle
on « reste à plat ! »

- 4) Par extension, si on représente l'ensemble des points du plan (x,y) tels que $x=c$ où c est une constante, il s'agit aussi d'une droite mais dont la pente n'est pas définie (on ne peut pas écrire l'équation de cette droite sous la forme $y = ax+b$)
 $\{(x,y) \mid x=2\}$ est une droite

x	2	2
y	1	2

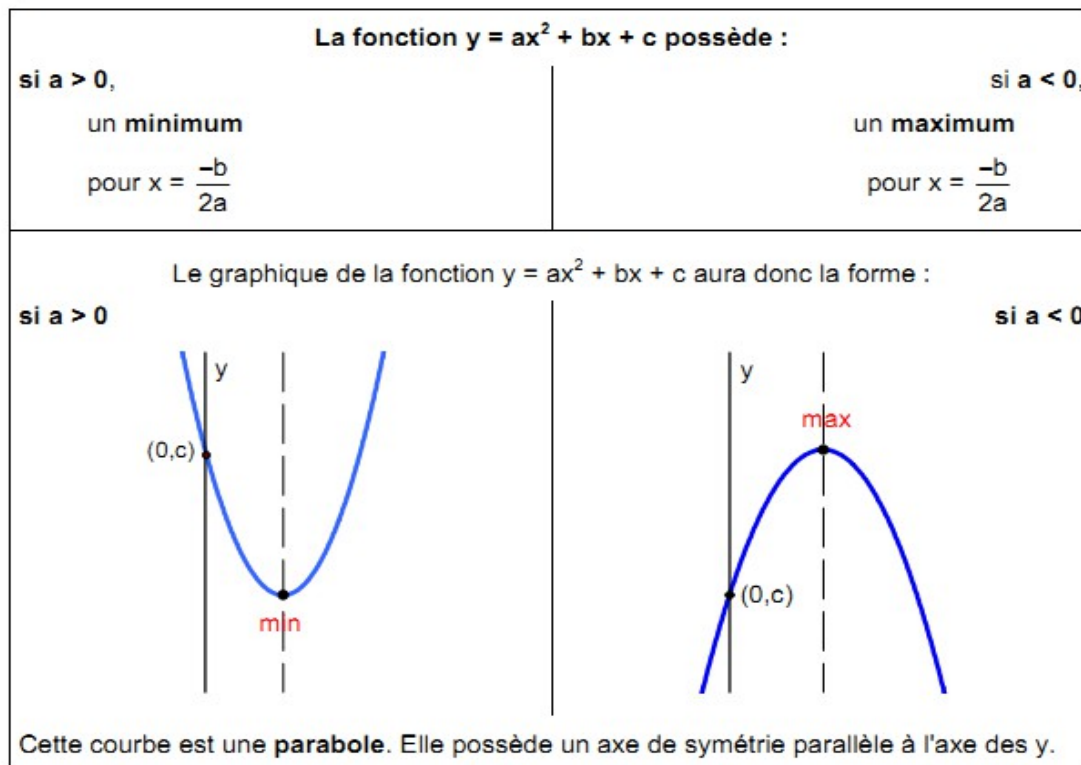


Droite d'équation $x = 2$

$$\text{Pente} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \frac{1-2}{2-2} \equiv \frac{-1}{0} \rightarrow \infty$$

Pente infinie
Droite verticale

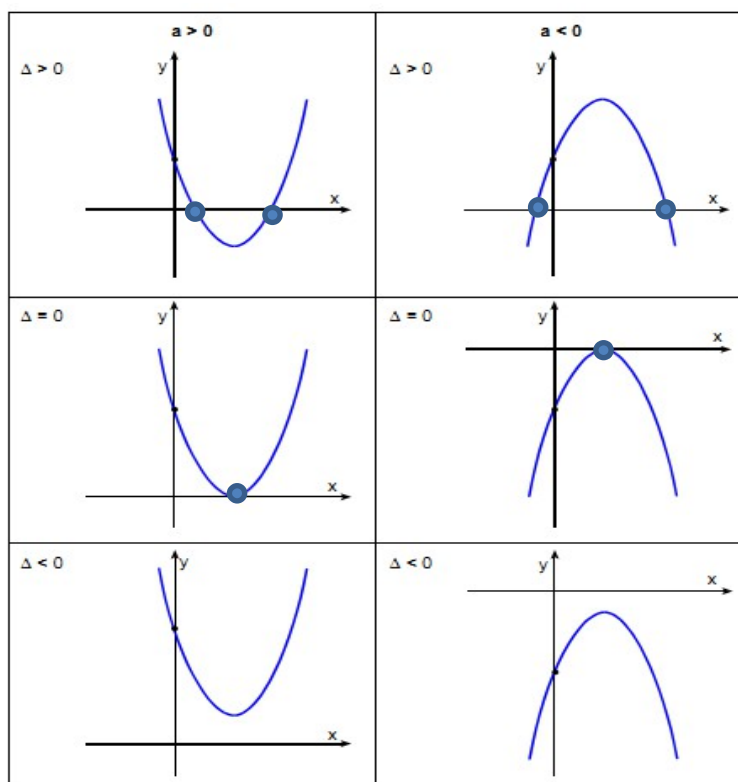
3. Graphique de la fonction du 2d degré type $y = ax^2 + bx + c$



L'ensemble des points $p(x,y)$ tels que $y = ax^2 + bx + c$ est une parabole P.

Les points (x,y) tels que $ax^2 + bx + c = 0$ sont $P \cap X$

Cette parabole coupe ou non l'axe des X 'selon la valeur de Δ

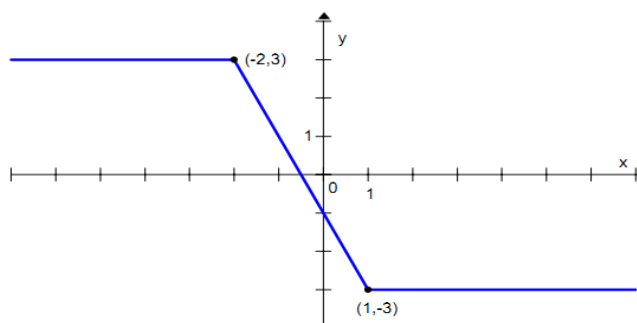


4. Graphique d'une fonction avec une valeur absolue

Représentation graphique de la fonction définie par $y = |1 - x| - |x + 2|$.

$$|1 - x| = \begin{cases} -(1 - x) & \text{si } 1 - x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \\ 1 - x & \text{si } 1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

$$|x + 2| = \begin{cases} -(x + 2) & \text{si } x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \\ x + 2 & \text{si } x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2 \end{cases}$$



On distingue donc trois cas.

1^{er} cas : $x \leq -2$

$$y = 1 - x + (x + 2) = 3$$

Le graphique est

$$]-\infty, -2].$$

2^{ème} cas : $-2 \leq x \leq 1$

$$y = 1 - x - (x + 2) = -2x - 1$$

x	-2	1
y	3	-3

Le graphique est le **segment de droite** dont les extrémités sont les points de coordonnées $(-2, 3)$ et $(1, -3)$.

3^{ème} cas : $x \geq 1$

$$y = -(1 - x) - (x + 2) = -3$$

Le graphique est une **demi-droite** parallèle à l'axe des x, définie dans l'intervalle

$$[1, +\infty[.$$

5. Graphique de fonctions non linéaires

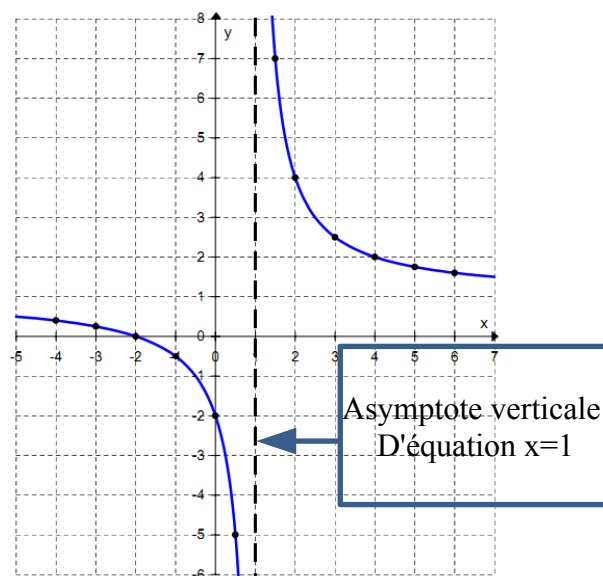
Exemple

Soit la fonction définie par $y = \frac{x+2}{x-1}$.

Cette fonction est définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Recherchons les images de quelques valeurs de x :

x	-4	-3	-2	-1	0	0,5	1,5	2	3	4	5
y	0,4	0,25	0	-0,5	-2	-5	7	4	2,5	2	1,75



LA SUITE DU COURS ...

portera principalement sur la recherche de graphique d'autres fonctions
à l'aide de nouveaux concepts (limites, dérivées)

Notion de vecteur

Source : <http://www.borlon.net/maths/lecture.php?num=12>

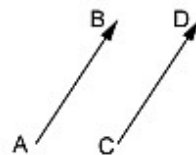
1. Définition

On appelle vecteur $\vec{v} = \vec{AB}$ un objet mathématique défini par 2 points du plan et caractérisé par

- sa direction : la droite AB
- son sens : origine A et extrémité B
- sa longueur notée $|\vec{AB}|$

ex : le vecteur $\vec{AB}$ est égal au vecteur $\vec{CD}$ (ils ont même direction, même sens et même longueur.)

La figure ABDC est alors un parallélogramme

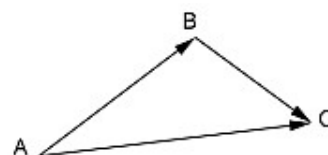


2. Somme de deux vecteurs

Somme de deux vecteurs

a) consécutifs (c.-à-d. tels que l'extrémité du premier coïncide avec l'origine du second) :

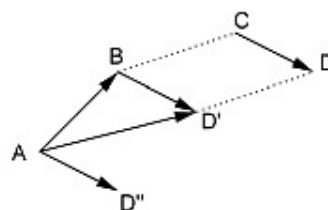
$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \quad (\text{relation de Chasles})$$



b) quelconques : on déplacera l'un des deux pour que l'extrémité de l'un coïncide avec l'origine de l'autre.

$$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{BD'} = \vec{AD'}$$

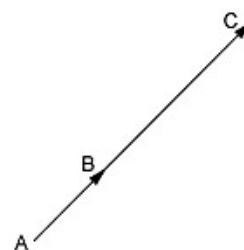
On peut aussi remarquer que $\vec{AB} + \vec{CD}$ est la diagonale du parallélogramme construit sur $\vec{AB}$ et $\vec{AD''}$



3. Multiplication scalaire d'un vecteur

Multiplication scalaire : $r \vec{AB}$ est un vecteur

- de même direction que $\vec{AB}$
 - de même sens que $\vec{AB}$ si r est positif et de sens opposé si r est négatif.
 - de longueur égale à $|r|$ fois celle de $\vec{AB}$
- dans l'illustration ci-contre $\vec{AC} = 3 \vec{AB}$



4. Repère - Composantes d'un vecteur

Repère – composantes d'un vecteur.

Si dans le plan π , on choisit une origine O on obtient le plan π_0

En choisissant deux vecteurs non nuls et non parallèles $\vec{i}$ et $\vec{j}$, chaque vecteur du plan se décompose de façon unique en une somme de multiples de ces vecteurs (combinaison linéaire de ces vecteurs) :

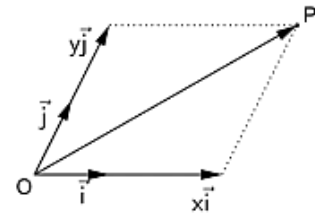
$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Alors $(0, \vec{i}, \vec{j})$ est appelé repère de π_0

(x, y) sont les composantes du vecteur $\vec{u}$ dans ce repère

N.B. : (x, y) est aussi la coordonnée du point P tel que $\vec{u} = \vec{OP}$

On montre aisément que les composantes de la somme de 2 vecteurs valent la somme des composantes et que les composantes de $r\vec{u} = r$ fois les composantes de $\vec{u}$

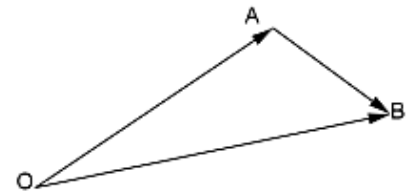


Considérons deux points du plan : A et B et leurs coordonnées respectives (a_1, a_2) et (b_1, b_2)

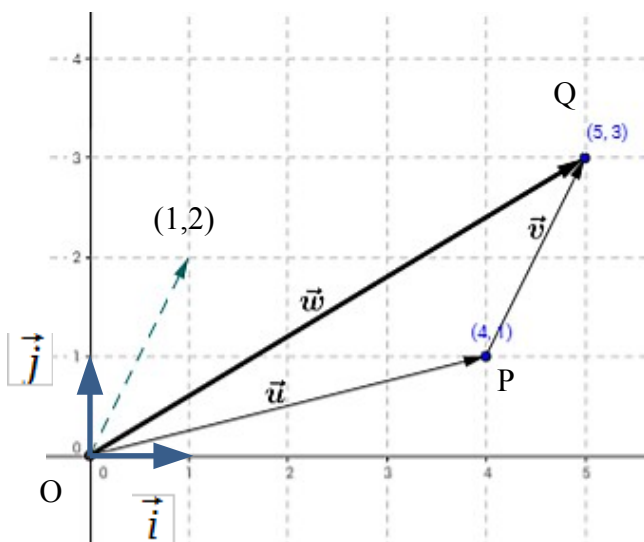
La relation de Chasles nous donne : $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$\Rightarrow$ composantes de $\vec{AB} =$ composantes de $\vec{OB} -$ composantes de $\vec{OA}$

ou encore : composantes de $\vec{AB} =$ "extrémité" - "origine"



Exemple 1



Le calcul des composantes d'un vecteur est assez simple, il suffit de soustraire les coordonnées des points qui définissent ce vecteur « extrémité » - « origine »

Par exemple les composantes du vecteur $\vec{PQ} = \vec{v}$ sont obtenues par la « soustraction » de $(5,3)$ et $(4,1) = (2,1)$

Les deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont tracés dans un repère orthonormé $\vec{i}$ est de composantes $(1,0)$ et $\vec{j}$ est de composantes $(0,1)$. Ils ne sont pas toujours cités.

On a deux points du plan de coordonnées $P(4,1)$ et de coordonnées $Q(5,3)$

Le vecteur $\vec{u}$, déterminé par l'origine $O(0,0)$ et le point $P(4,1)$ est dit de composantes $(4,1)$.

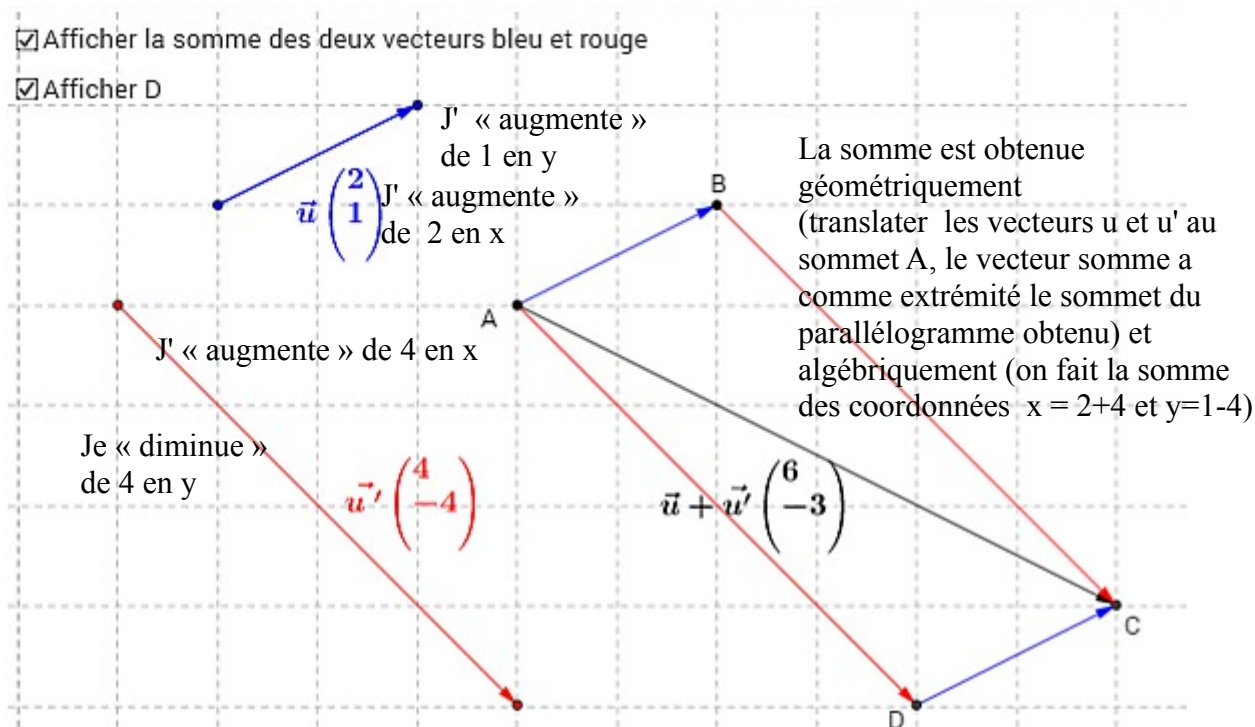
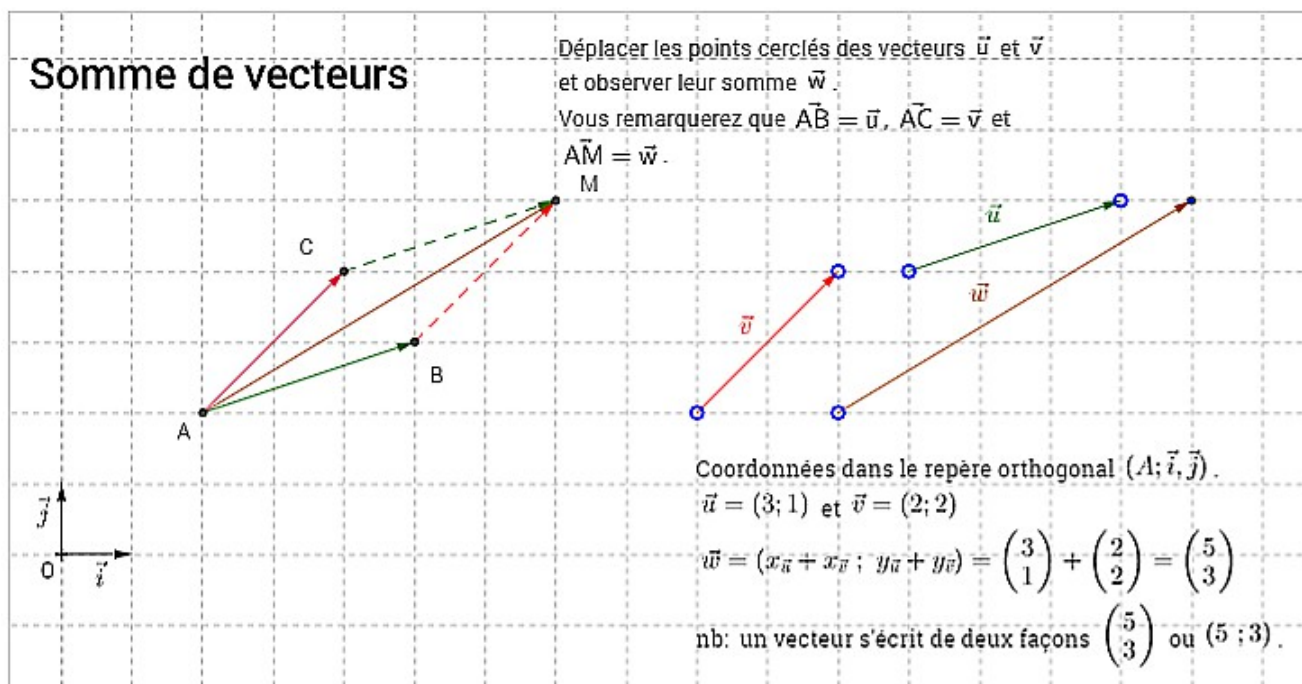
Le vecteur $\vec{w}$, déterminé par l'origine $O(0,0)$ et le point $Q(5,3)$ est dit de composantes $(5,3)$

Le vecteur $\vec{v}$ est lui de composantes $(1,2)$, si on l'avait translaté à l'origine (vecteur en pointillé) on voit aisément qu'on serait « arrivé » au point de coordonnée $(1,2)$.

Exemple 2

On peut aussi ne pas placer de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et considérer que le vecteur est à l'origine, on regarde de combien « on varie en x » et de combien « on varie en y »

Quelquefois les composantes d'un vecteur sont notées verticalement $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ plutôt que horizontalement $\vec{u} (2,1)$

**Exemple 3**

Exercices avec solutions

Division euclidienne – Hörner

Réponses en page : 33

13. Recherche le reste de la division de :

1) $x^3 + 5x^2 - x - 4$ par $x - 1$

3) $x^3 - 2x^2 + 3x - 6$ par $x + 1$

2) $x^4 - x^2 - x + 1$ par $x - 1$

4) $2x^4 - x - 16$ par $x - 2$

14. après avoir déterminé le reste des divisions suivantes, détermine le quotient :

1) $(x^3 - x^2 + x - 2) / (x - 1)$

2) $(x^3 + x^2 - 2) / (x - 1)$

39. Calcule le reste de la division de :

1) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$ par $x - 1$

2) $x^4 - 5x^2 - x$ par $x + 1$

3) $5x^3 - x + 5$ par $x + 1$

4) $x^3 - x + 2$ par $x - 2$

41. Calcule, par la règle de Hörner, le quotient et le reste de la division de :

1) $3x^2 - 5x + 3$ par $x + 2$

2) $x^3 - 2x^2 + x + 3$ par $x - 1$

3) $4x^3 - 3x^2 + 5$ par $x + 1$

4) $y^3 - y + 1$ par $y - \frac{1}{2}$

5) $2z - z^2 + z^3$ par $z - 2$

6) $4t^5 - 3t^3 + 1$ par $t + 2$

43. Factorise :

1) $y^3 + 2y^2 - 5y - 6$

3) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

5) $x^3 + 7x^2 + 15x + 9$

2) $x^3 + 2x^2 - 2 - x$

4) $x^3 + 3x^2 - 4$

6) $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$

44. Factorise, si possible :

1) $\sqrt{2}(x + 1) - x(x + 1)$

7) $2x^2 - 128$

2) $3x^3 - x^2 - 12x + 4$

8) $x^2 + 8x + 16 - 9y^2$

3) $x^4 - 7x^3 - x - 7$

9) $x^9 - 8x^6 - x^3 + 8$

4) $x^4 - 2x^2 + 1$

10) $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2$

5) $x^3 - x^2 + 0,25x$

11) $(x - 1)^2 - (1 - x)(2x - 1)$

6) $x^2 + 16$

12) $x^3 + 8$

Puissances à exposants fractionnaires et radicaux d'indice n

Réponses en page : 35

58. Calcule sans l'aide de la calculatrice, en ne laissant pas d'exposant dans les réponses :

$$\begin{array}{llllll}
 1) \sqrt[3]{27} & 3) -\sqrt[3]{-27} & 5) -\sqrt[4]{625} & 7) \sqrt[4]{(-2)^8} & 9) \sqrt[4]{4^{-2}} & 11) \sqrt[3]{0,008} \\
 2) \sqrt[3]{-27} & 4) \sqrt[4]{16} & 6) \sqrt[4]{7^8} & 8) \sqrt[3]{8^{-1}} & 10) \sqrt[3]{0,001} & 12) -\sqrt[4]{\frac{81}{256}}
 \end{array}$$

60. Écris sous forme de radicaux, les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lllll}
 1) 2^{\frac{1}{3}} & 3) |-2|^{\frac{1}{3}} & 5) |-2|^{-\frac{1}{3}} & 7) 3^{\frac{1}{2}} & 9) \left(\frac{3}{7}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
 2) -2^{\frac{1}{3}} & 4) 2^{-\frac{1}{3}} & 6) -2^{-\frac{1}{3}} & 8) 5^{\frac{3}{4}} & 10) -\left(\frac{3}{7}\right)^{-\frac{1}{2}}
 \end{array}$$

61. Calcule sans l'aide de la calculatrice :

$$\begin{array}{lllll}
 1) -\sqrt[5]{243} & 3) \sqrt[5]{243} & 5) 49^{\frac{1}{2}} & 7) 81^{\frac{3}{4}} & 9) 16^{-\frac{1}{4}} \\
 2) \sqrt[5]{-243} & 4) \sqrt[3]{343^{-1}} & 6) 27^{\frac{2}{3}} & 8) 0,01^{-\frac{1}{2}} & 10) \left(\frac{625}{256}\right)^{-\frac{1}{4}}
 \end{array}$$

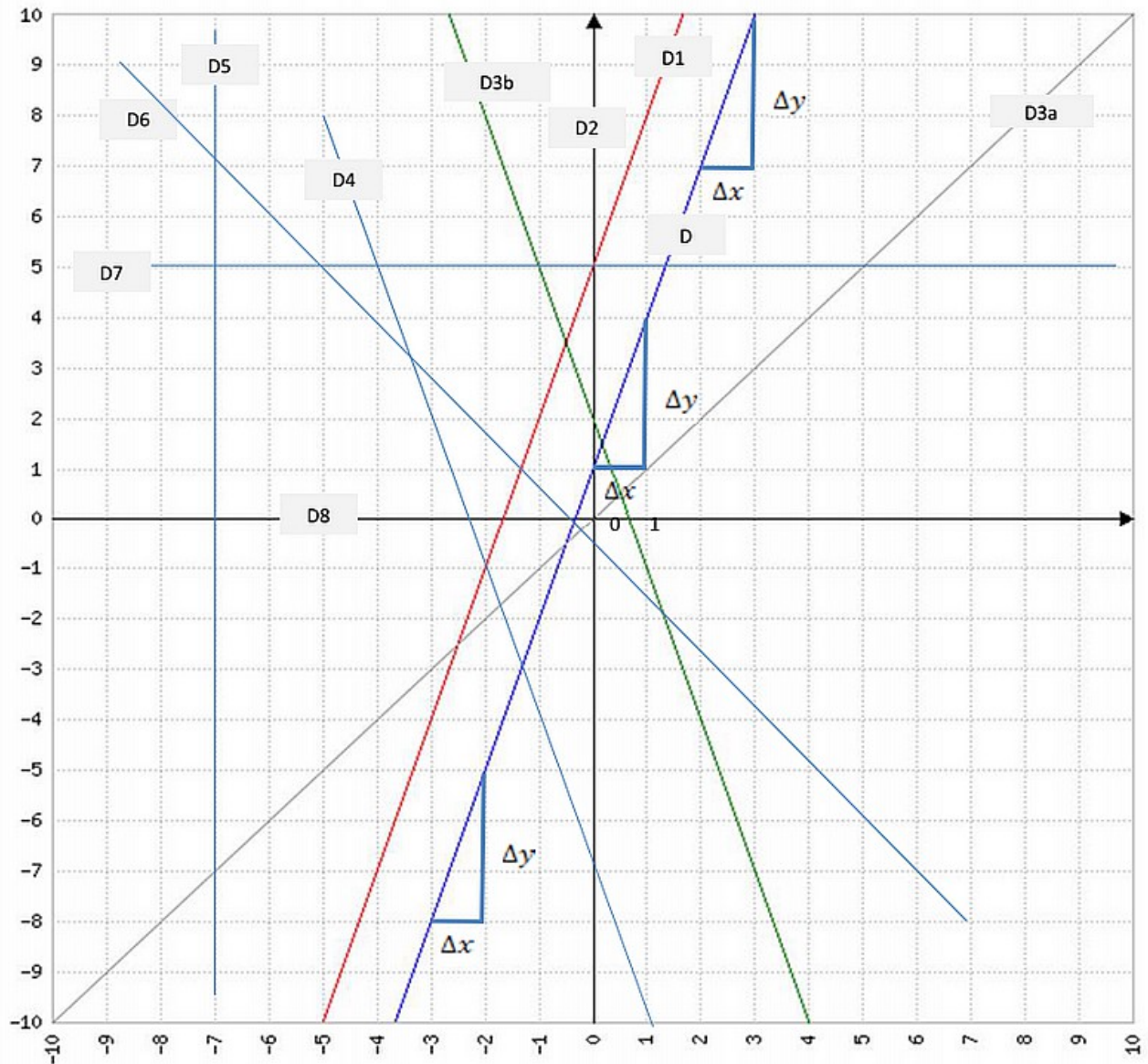
62. Ecris sous forme d'une puissance de a ($a \in \mathbb{R}_0^+$) les expressions suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 1) a^{\frac{1}{2}} \cdot a & 4) a^{1,5} \cdot a^{1,25} \cdot a^{0,25} & 7) (a^2)^{\frac{2}{3}} & 10) (a^{0,5})^2 \\
 2) a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} & 5) \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}} & 8) \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{-5} & 11) \left(\frac{a}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{a} \\
 3) a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-1} & 6) \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3 & 9) \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} & 12) \frac{(a^{-1})^{-2}}{(a^2)^3 \cdot a^{-1}}
 \end{array}$$

Droites et paraboles (1^{er} et 2^e degré)

Réponses en page 36:

420 Voici une série de droites dans un repère cartésien



Exercice trouver les équations de chaque droite ci-dessous et donner leur pente

Pour D : pente $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{1} = 3$ et coefficient b = valeur de ordonnée à l'origine (qd $x=0$) = 1 ici
 donc $D \equiv y = 3x+1$

$D \equiv y = 3x+1$ ou $D \equiv 3x - y + 1 = 0$
 sont des équations différentes qui représentent LA MEME DROITE !!!!!

	// Y ?	pente a	coefficient b	Equation type $y = ax+b$	Equation type $ax + by + c = 0$
D1				D1 $\equiv$	
D2				D2 $\equiv$	
D3a				D3 $\equiv$	
D3b					
D4				D4 $\equiv$	
D5				D5 $\equiv$	
D6				D6 $\equiv$	
D7				D7 $\equiv$	
D8				D8 $\equiv$	

A retenir absolument



421. On donne: • le point $a(2, 7)$

- les droites $D_1 \equiv x - 2y - 8 = 0$
 $D_2 \equiv 3x + y - 3 = 0$
 $D_3 \equiv x + 2y - 4 = 0$
 $D_4 \equiv 3x - 2y + 12 = 0$

- les points $\{b\} = D_1 \cap D_2$; $\{c\} = D_3 \cap D_4$

1) Calcule la coordonnée de b et de c et fais la vérification graphique.

2) Détermine le système d'inéquations qui définit le triangle ouvert abc .

422. On donne :

$$D_1 \equiv 4x - y - 8 = 0$$

$$D_2 \equiv 4x + 3y - 24 = 0$$

$$D_3 \equiv x - y + 4 = 0$$

$$D_4 \equiv 2x + y + 5 = 0$$

$$D_5 \equiv x + y - 2 = 0$$

$$D_6 \equiv 2x + y - 5 = 0$$

$$\{a\} = D_1 \cap D_2$$

$$\{b\} = D_3 \cap D_4$$

$$\{c\} = D_5 \cap D_6$$

et

- Calcule la coordonnée de a , de b , de c ;
- Fais la vérification graphique;
- Calcule le système d'inéquations qui définit le triangle fermé abc .

434. Dessine le graphe cartésien des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$ telles que

$$1. f(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$3. f(x) = x^2 - 25$$

$$5. f(x) = 3x^2 - 9x$$

$$2. f(x) = 2x^2 - x - 1$$

$$4. f(x) = -4x^2 + 9$$

$$6. f(x) = 4x^2 + 20x + 25$$

436. Un canon placé sur une colline à 600 m d'altitude tire à sa distance maximale.

L'équation du mouvement est $y = -0,000106x^2 + x + 600$.

- Calcule la portée (distance de tir).
- Quelle est la hauteur maximale atteinte par l'obus ?

437. Pour les douze mois de l'année 1981, l'avoir d'une société, exprimé en millions de francs, est donné par la formule $f(t) = t^2 - 6t + 8$, l'unité de temps étant le mois. $t = 0$ le premier janvier 1981.

- Quand l'avoir de la société est-il positif ?
- Quand la société a-t-elle contracté des dettes ?
- A quelle date s'est-elle trouvée le plus endettée ?— De quelle somme ?

Intersection droite/parabole – résolution graphique et algébrique

438 réponse en p 40

Question 1Soit f la fonction définie par : $f(x) = 6x^2 - 15x - 9$ On appelle P la parabole représentative de f , et D la droite d'équation : $y = 5x + 7$ Calculer les coordonnées du ou des éventuels points d'intersection de la parabole P avec la droite D .Question 2Soit f la fonction définie par : $f(x) = -2x^2 + 2x - 3$ On appelle P la parabole représentative de f , et D la droite d'équation : $y = 3x - 3$ Calculer les coordonnées du ou des éventuels points d'intersection de la parabole P avec la droite D .Question 3Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 + 3x - 5$ On appelle P la parabole représentative de f , et D la droite d'équation : $y = -2x$ Calculer les coordonnées du ou des éventuels points d'intersection de la parabole P avec la droite D .Fractions rationnelles et irrationnelles

Réponses en page 46

467. Simplifie, s'il y a lieu, en indiquant les conditions d'existence et de simplification.

1. $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}$

2. $\frac{u^2 + 4u + 3}{u^2 + 5u + 4}$

3. $\frac{2t^2 - t - 1}{2t^2 - 5t - 3}$

4. $\frac{x^2 + 3x - 18}{2x^2 - 3x - 9}$

5. $\frac{2x^2 + x - 6}{6x^2 - 7x - 3}$

6. $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$

7. $\frac{x^2 + 25x + 100}{x^2 + 50x + 625}$

8. $\frac{y^2 - 9}{y^2 - 5y + 6}$

9. $\frac{(x^2 + 4x + 3)(2x - x^2)}{(2x^2 - 5x - 3)(x^2 + 5x + 4)}$

10. $\frac{(6x^2 + 7x - 3)(8x^2 - 6x - 5)}{(15x^2 - 11x + 2)(2x^2 + 7x + 3)}$

469. Résous, dans $\mathbb{R}$, sans oublier au préalable les conditions d'existence :

1. $\frac{2}{x-1} - \frac{3x}{x+1} = 1$

2. $2y - \frac{y}{y-1} = y + 1$

3. $\frac{3z-1}{z-2} + \frac{2z-1}{z+1} = \frac{1}{z^2-z-2}$

4. $\frac{u-2}{3(u-1)} + \frac{u-1}{4u-8} = \frac{u+2}{2-3u+u^2}$

5. $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x-a}{x+a} = 1 \quad (a \in \mathbb{R})$

Domaines de fonctions

tac 5 réponses en page 47 - tac 6 en page 48

TAC 5 Leçon 19

Déterminez le domaine de chacune des fonctions suivantes :

1) $y = 2x^3 + 5x^2 - x - 4$

2) $y = \frac{1-x}{2-x}$

3) $y = \sqrt{x-1}$

4) $y = \frac{x}{x^2 + 14x + 13}$

5) $y = \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{2x+3}}$

6) $y = \sqrt[3]{x^2 + x - 2}$

TAC 6 Leçon 19

Déterminez le domaine de chacune des fonctions suivantes :

1) $y = \sqrt{-x^2 - 5x - 6}$

2) $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$

3) $y = \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{x-2}$

4) $y = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{1-x}}$

5) $y = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt[3]{x^2 - x}}$

6) $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2 + 4x}$

tac 1 et 2 leçon 20 réponses en page 51

TAC 1 Leçon 20

Déterminez le domaine des fonctions suivantes :

1) $y = \sqrt{\frac{x^2 + x - 2}{-x^2 + 4x}}$

3) $y = \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{-x^2 + 4x}}$

2) $y = \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt{-x^2 + 4x}}$

4) $y = \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{-x^2 + 4x}$

TAC 2

Leçon 20

Déterminez le domaine des fonctions suivantes :

1) $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-5} + 10 - x}$

3) $y = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x}}{\sqrt{x+3} - x + 3}$

2) $y = \frac{1 - \sqrt{x+2}}{x-1 - \sqrt{25-x^2}}$

4) $y = \frac{\sqrt{x^2 - x - 6}}{2 - \sqrt{x-1}}$

Somme et multiplication scalaire de vecteurs

réponse en page 55

Soient deux vecteurs u et v

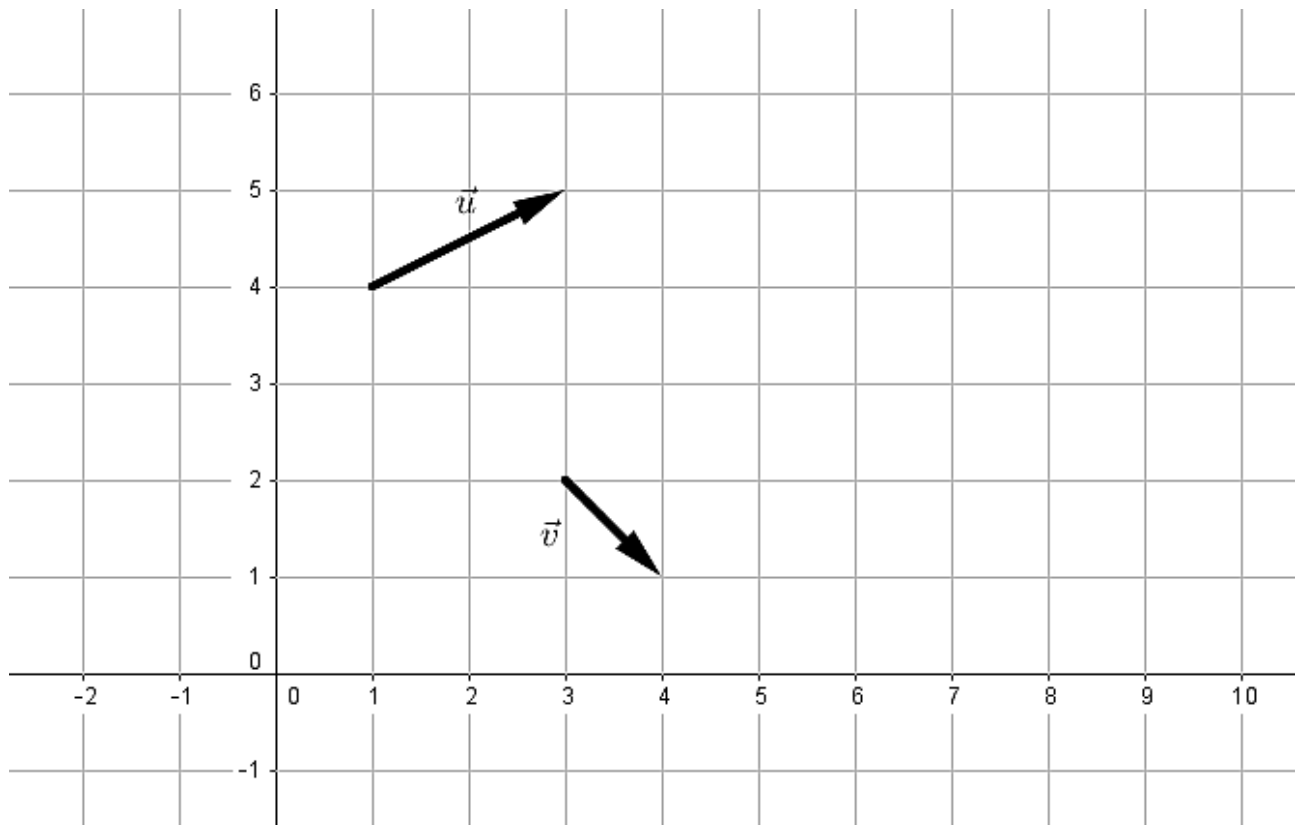
Déterminer géométriquement les vecteurs suivants

$$3 \vec{u} + 2 \vec{v}$$

$$- \vec{u} + \vec{v}$$

$$2 \vec{u} - \vec{v}$$

Donner également leurs composantes.



Solutions des exercices

Horner – questions en page 25

13. 1) 1 2) 0 3) -12 4) 14

14. 1) $R = -1$ $Q = x^2 + 1$
 2) $R = 0$ $Q = x^2 + 2x + 2$

39. 1) 0 2) -3 3) 1 4) 8

40. 1) -6 2) -3

41. 1)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -5 & 3 & \\ -2 & & -6 & 22 & \\ \hline & 3 & -11 & 25 & \end{array}$$
 $Q = 3x - 11 \quad R = 25$

2)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & & 1 & -1 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}$$
 $Q = x^2 - x \quad R = 3$

3)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & & -4 & 7 & -7 \\ \hline & 4 & -7 & 7 & -2 \end{array}$$
 $Q = 4x^2 - 7x + 7 \quad R = -2$

4)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\ \hline & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{5}{8} \end{array}$$
 $Q = y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{3}{4} \quad R = \frac{5}{8}$

5)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & & 2 & 2 & 8 \\ \hline & 1 & 1 & 4 & 8 \end{array}$$
 $Q = z^2 + x + 4 \quad R = 8$

6)
$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 4 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & & -8 & 16 & -26 & 52 & -104 \\ \hline & 4 & -8 & 13 & -26 & 52 & -103 \end{array}$$
 $Q = 4t^4 - 8t^3 + 13t^2 - 26t + 52$
 $R = -103$

43. 1) $(y+1)(y-2)(y+3)$ 3) $(x+1)(x+2)(x+3)$ 5) $(x+1)(x+3)^2$
 2) $(x+2)(x+1)(x-1)$ 4) $(x-1)(x+2)^2$ 6) $(x-1)(x-2)(2x-1)$

44. 1) $(x+1)(\sqrt{2}-x)$
 2) $(3x-1)(x+2)(x-2)$
 3) —
 4) $(x+1)^2(x-1)^2$
 5) $x(x-0,5)^2$
 6) —
 7) $2(x+8)(x-8)$
 8) $(x+3y+4)(x-3y+4)$
 9) $(x-2)(x^2+2x+4)(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$
 10) $(x-1)(x+1)(x-2)(2x-1)$
 11) $(x-1)(3x-2)$
 12) $(x+2)(x^2-2x+4)$

Exposants fractionnaires -

questions en page 26

58. 1) 3 3) 3 5) -5 7) 4 9) $\frac{1}{2}$ 11) 0,2
 2) -3 4) 2 6) 49 8) $\frac{1}{2}$ 10) 0,1 12) $-\frac{3}{4}$

60. 1) $\sqrt[3]{2}$ 3) $\sqrt[3]{2}$ 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 7) $\sqrt{3}$ 9) $\sqrt{\frac{7}{3}}$
 2) $-\sqrt[3]{2}$ 4) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 6) $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 8) $\sqrt[4]{5^3}$ 10) $-\sqrt{\frac{7}{3}}$

61. 1) -3 3) 3 5) 7 7) 27 9) $\frac{1}{2}$
 2) -3 4) $\frac{1}{7}$ 6) 9 8) 10 10) $\frac{4}{5}$

62. 1) $a^{\frac{3}{2}}$ 3) a 5) $a^{\frac{1}{6}}$ 7) $a^{\frac{4}{3}}$ 9) $a^{\frac{1}{2}}$ 11) $a^{-\frac{1}{2}}$
 2) $a^{\frac{5}{6}}$ 4) a^3 6) a^2 8) a^{-1} 10) a 12) a^{-3}

Droites et paraboles

questions en page 27

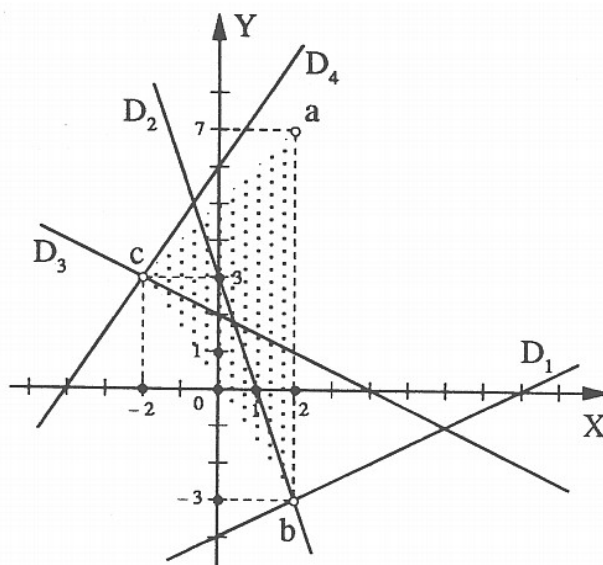
421. 1) $b = (2, -3)$; $c = (-2, 3)$

2) $ab \equiv x - 2 = 0$

$ac \equiv x - y + 5 = 0$

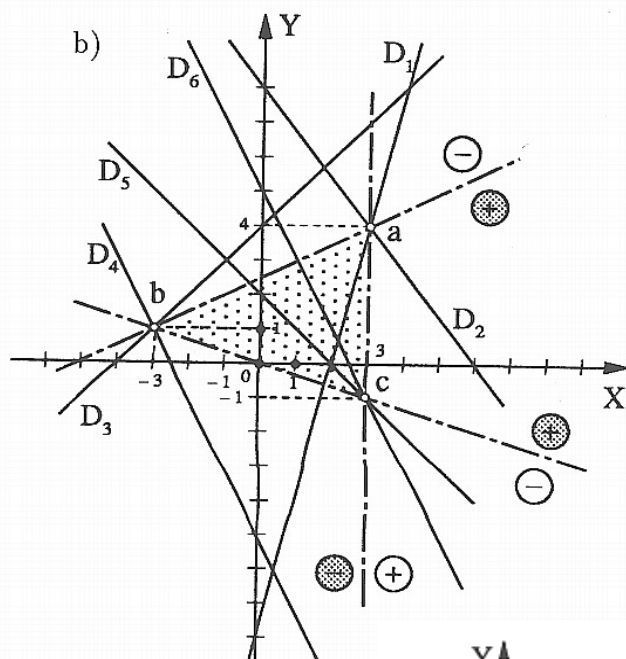
$bc \equiv 3x + 2y = 0$

Donc
$$\begin{cases} x - 2 < 0 \\ x - y + 5 > 0 \\ 3x + 2y > 0 \end{cases}$$

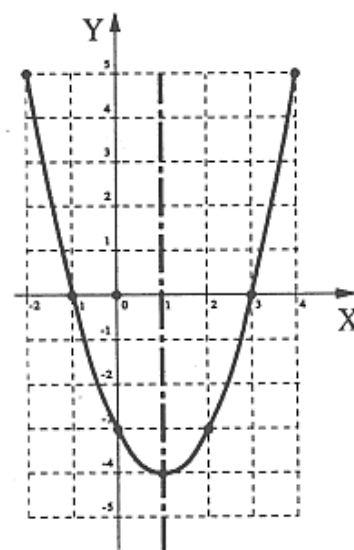


422. a) $a = (3, 4)$
 $b = (-3, 1)$
 $c = (3, -1)$

c)
$$\begin{cases} x - 2y + 5 \geq 0 \\ x - 3 \leq 0 \\ x + 3y \geq 0 \end{cases}$$



434. 1) • axe de symétrie: $x = 1$
 • minimum: $(1, -4)$
 • $G_f \cap X = \{(3, 0), (-1, 0)\}$
 • $G_f \cap Y = \{(0, -3)\}$. Son symétrique est $(2, -3)$
 • points supplémentaires: $(4, 5)$ et son symétrique $(-2, 5)$



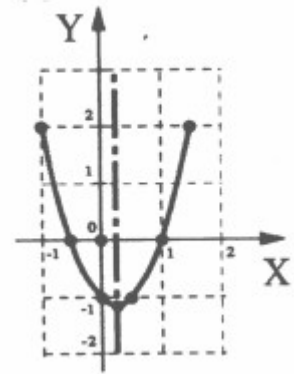
2) • axe de symétrie: $x = \frac{1}{4}$

• minimum: $\left(\frac{1}{4}, -\frac{9}{8}\right)$

• $G_f \cap X = \left\{\left(-\frac{1}{2}, 0\right), (1, 0)\right\}$

• $G_f \cap Y = \{(0, -1)\}$ et son symétrique est $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$

• points supplémentaires: $(-1, 2)$ et son symétrique $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$



(434) 3) • axe de symétrie: $x = 0$

• minimum: $(0, -25)$

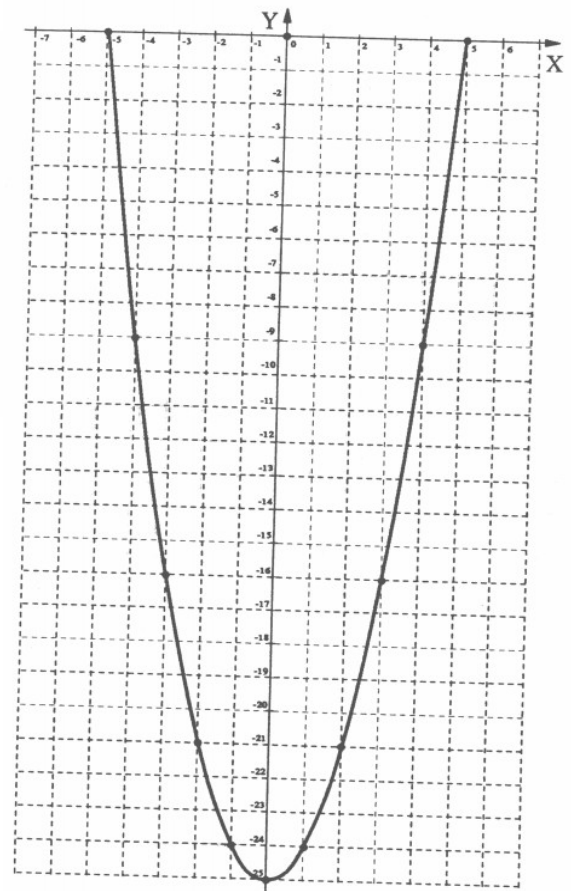
• $G_f \cap X = \{(5, 0), (-5, 0)\}$

• $G_f \cap Y = \{(0, -25)\}$

• points supplémentaires:

$(2, -21)$ et son symétrique $(-2, -21)$

$(1, -24)$ et son symétrique $(-1, -24)$



(434) 4) • axe de symétrie: $x = 0$

• maximum: $(0, 9)$

• $G_f \cap X = \left\{ \left(\frac{3}{2}, 0 \right), \left(-\frac{3}{2}, 0 \right) \right\}$

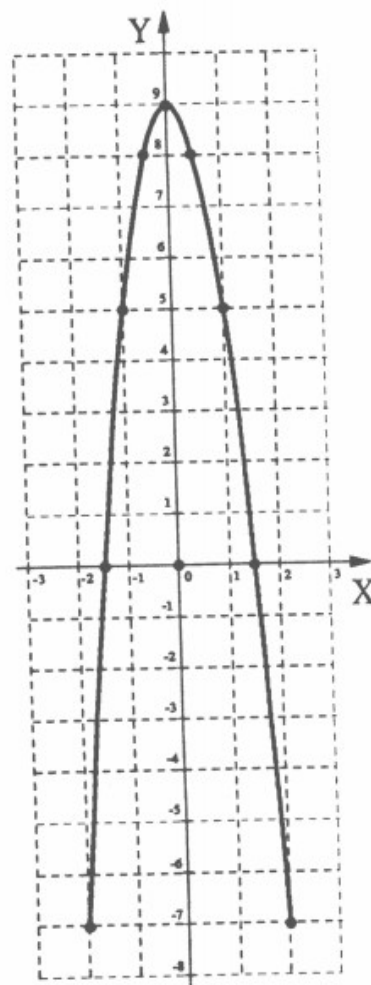
• $G_f \cap Y = \{(0, 9)\}$

• points supplémentaires:

$\left(\frac{1}{2}, 8 \right)$ et son symétrique $\left(-\frac{1}{2}, 8 \right)$

$(2, -7)$ et son symétrique $(-2, -7)$

$(1, 5)$ et son symétrique $(-1, 5)$



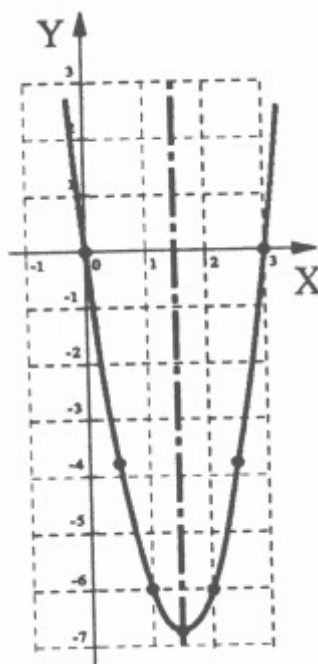
5) • axe de symétrie: $x = \frac{3}{2}$

• minimum: $\left(\frac{3}{2}, -\frac{27}{4} \right)$

• $G_f \cap X = \{(0, 0), (3, 0)\}$

• points supplémentaires:

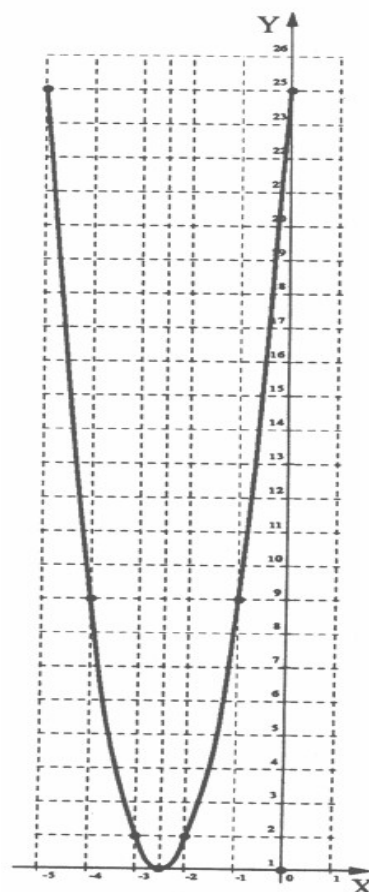
$(1, -6)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{15}{4} \right)$
et leurs symétriques



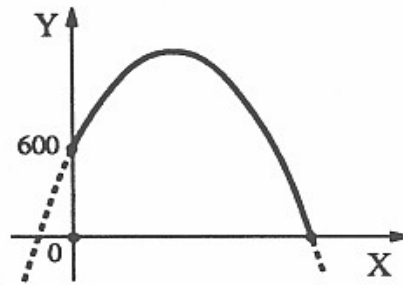
(434) 6) • axe de symétrie: $x = -\frac{5}{2}$

• minimum: $\left(-\frac{5}{2}, 0 \right)$

• points supplémentaires: $(-2, 1)$, $(-1, 9)$, $(0, 25)$
et leurs symétriques



436.



a) La portée correspond à la racine positive

La racine positive de l'équation $106x^2 - 10^6x - 6 \cdot 10^8 = 0$ est 10000

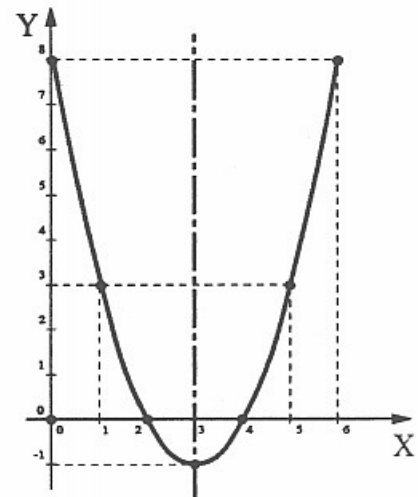
Ce canon a une portée de 10 km

b) Le sommet de la parabole a pour ordonnée 2958,5

L'obus atteint la hauteur de 2958,5 m

437. Soit la parabole $P \equiv t^2 - 6t + 8 = y$

- 1) L'avoir est positif en janvier, en février et à partir de mai
- 2) Il y a des dettes en mars et avril
- 3) Le 1 avril, il y avait une dette de 1 million de francs.



Intersection droite/parabole – résolution graphique et algébrique

438 question en page 30

Question 1Soit f la fonction définie par : $f(x) = 6x^2 - 15x - 9$ On appelle P la parabole représentative de f , et D la droite d'équation : $y = 5x + 7$ Calculer les coordonnées du ou des éventuels points d'intersection de la parabole P avec la droite D .Tracer le graphe de P et D .Correction

Un point $M(x,y)$ est un point d'intersection de la parabole P et de la droite D si et seulement si ses coordonnées (x,y) vérifient les équations des deux courbes, ce qui amène à résoudre un système d'équations à deux inconnues x et y .

$$\begin{cases} y = 6x^2 - 15x - 9 \\ y = 5x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 7 = 6x^2 - 15x - 9 \\ y = 5x + 7 \end{cases}$$

Résolvons (E) : $5x + 7 = 6x^2 - 15x - 9$:

$$5x + 7 = 6x^2 - 15x - 9 \Leftrightarrow 6x^2 - 20x - 16 = 0$$

Calcul du discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4 \times 6 \times (-16) = 400 + 384 = 784$$

 $\Delta > 0$ donc l'équation (E) admet deux solutions distinctes :

$$\begin{aligned} \bullet \quad x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{20 - \sqrt{784}}{2 \times 6} = \frac{20 - 28}{12} = \frac{-8}{12} = -\frac{2}{3} \\ \bullet \quad x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{20 + \sqrt{784}}{2 \times 6} = \frac{20 + 28}{12} = \frac{48}{12} = 4 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} y = 6x^2 - 15x - 9 \\ y = 5x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \text{ ou } x = 4 \\ y = 5x + 7 \end{cases}$$

$$\text{Si } x = -\frac{2}{3}, y = 5x + 7 = 5 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 7 = -\frac{10}{3} + \frac{21}{3} = \frac{11}{3}$$

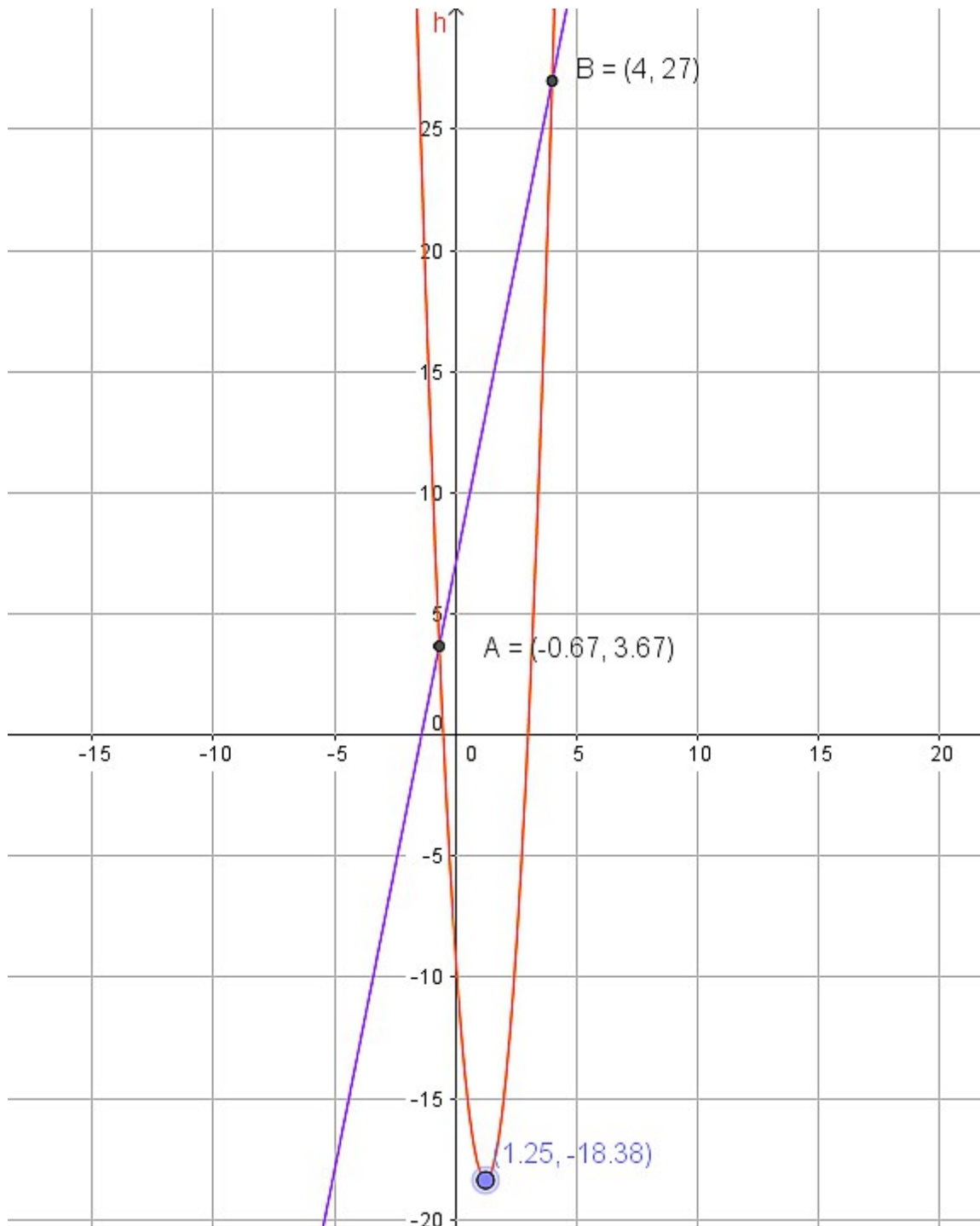
$$\text{Si } x = 4, y = 5x + 7 = 5 \times 4 + 7 = 27$$

 P et D ont donc deux points d'intersection :

$$A\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}\right) \quad \text{et} \quad B(4; 27)$$

On a deux points d'intersections de coordonnées $A(-0,67; 3,67)$ et $B(4; 27)$

On représente graphiquement la parabole en sachant que son sommet est d'abscisse $-b/2a$ ($15/12 = 5/4 = 1,25$), que du coup l'ordonnée du sommet vaut $6\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 15\left(\frac{5}{4}\right) - 9 = -(294/16) = -18,38$. Son axe de symétrie est $x = 1,25$ et son ordonnée à l'origine vaut -9 . $a > 0$ donc sa concavité est tournée vers le haut. La droite $y = 5x + 7$ est de pente 5 et a comme ordonnée à l'origine 7.



Question 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = -2x^2 + 2x - 3$

On appelle P la parabole représentative de f , et D la droite d'équation : $y = 3x - 3$

Calculer les coordonnées du ou des éventuels points d'intersection de la parabole P avec la droite D .

Tracer le graphe de P et D .

Correction

Un point $M(x,y)$ est un point d'intersection de la parabole P et de la droite D si et seulement si ses coordonnées (x,y) vérifient les équations des deux courbes, ce qui amène à résoudre un système d'équations à deux inconnues x et y .

$$\begin{cases} y = -2x^2 + 2x - 3 \\ y = 3x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3 = -2x^2 + 2x - 3 \\ y = 3x - 3 \end{cases}$$

Réolvons (E) : $3x - 3 = -2x^2 + 2x - 3$:

$$3x - 3 = -2x^2 + 2x - 3 \Leftrightarrow -2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(-2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} y = -2x^2 + 2x - 3 \\ y = 3x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2} \\ y = 3x - 3 \end{cases}$$

Si $x = 0$, $y = 3x - 3 = -3 \times 0 - 3 = -3$

Si $x = -\frac{1}{2}$, $y = 3x - 3 = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = -\frac{3}{2} - \frac{6}{2} = -\frac{9}{2}$

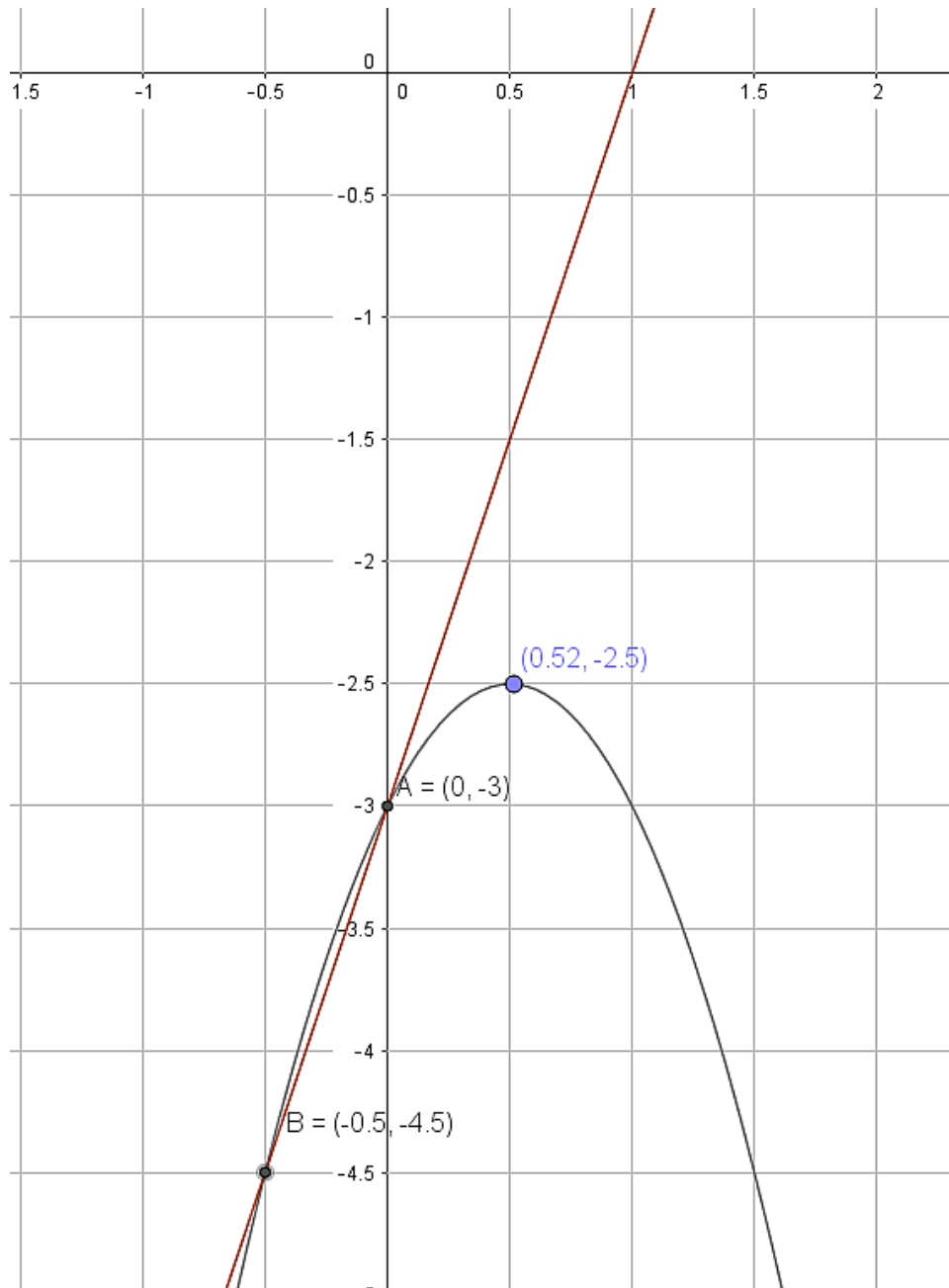
P et D ont donc deux points d'intersection :

$A(0; -3)$ et $B\left(-\frac{1}{2}; -\frac{9}{2}\right)$

On a deux points d'intersections de corrdonnées $A(0 ; -3)$ et $B(-0,5 ; -4,5)$

On représente graphiquement la parabole en sachant que son sommet est d'abscisse $-b/2a$

$(-2/-4=1/2=0,5)$, que du coup l'ordonnée du sommet vaut $-2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = -2,5$. Son axe de symétrie est $x=0,5$ et son ordonnée à l'origine vaut -3 . $a < 0$ donc sa concavité est tournée vers le bas. La droite $y=3x-3$ est de pente 3 et son ordonnée à l'origine vaut -3 .



Question 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 + 3x - 5$

On appelle P la parabole représentative de f , et D la droite d'équation : $y = -2x$

Calculer les coordonnées du ou des éventuels points d'intersection de la parabole P avec la droite D .

Tracer le graphe de P et D .

Correction

Un point $M(x,y)$ est un point d'intersection de la parabole P et de la droite D si et seulement si ses coordonnées (x,y) vérifient les équations des deux courbes, ce qui amène à résoudre un système d'équations à deux inconnues.

$$\begin{cases} y = x^2 + 3x - 5 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = x^2 + 3x - 5 \\ y = -2x \end{cases}$$

Réolvons (E) : $-2x = x^2 + 3x - 5$:

$$-2x = x^2 + 3x - 5 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 5 = 0$$

Calcul du discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 25 + 20 = 45$$

$\Delta > 0$ donc l'équation (E) admet deux solutions distinctes :

$$\begin{aligned} \bullet \quad x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{45}}{2 \times 1} = \frac{-5 - \sqrt{3 \times 3 \times 5}}{2} = \frac{-5 - 3\sqrt{5}}{2} \\ \bullet \quad x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{45}}{2 \times 1} = \frac{-5 + \sqrt{3 \times 3 \times 5}}{2} = \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} y = x^2 + 3x - 5 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5 - 3\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{2} \\ y = -2x \end{cases}$$

$$\text{Si } x = \frac{-5 - 3\sqrt{5}}{2}, y = -2 \times x = -2 \times \frac{-5 - 3\sqrt{5}}{2} = 5 + 3\sqrt{5}$$

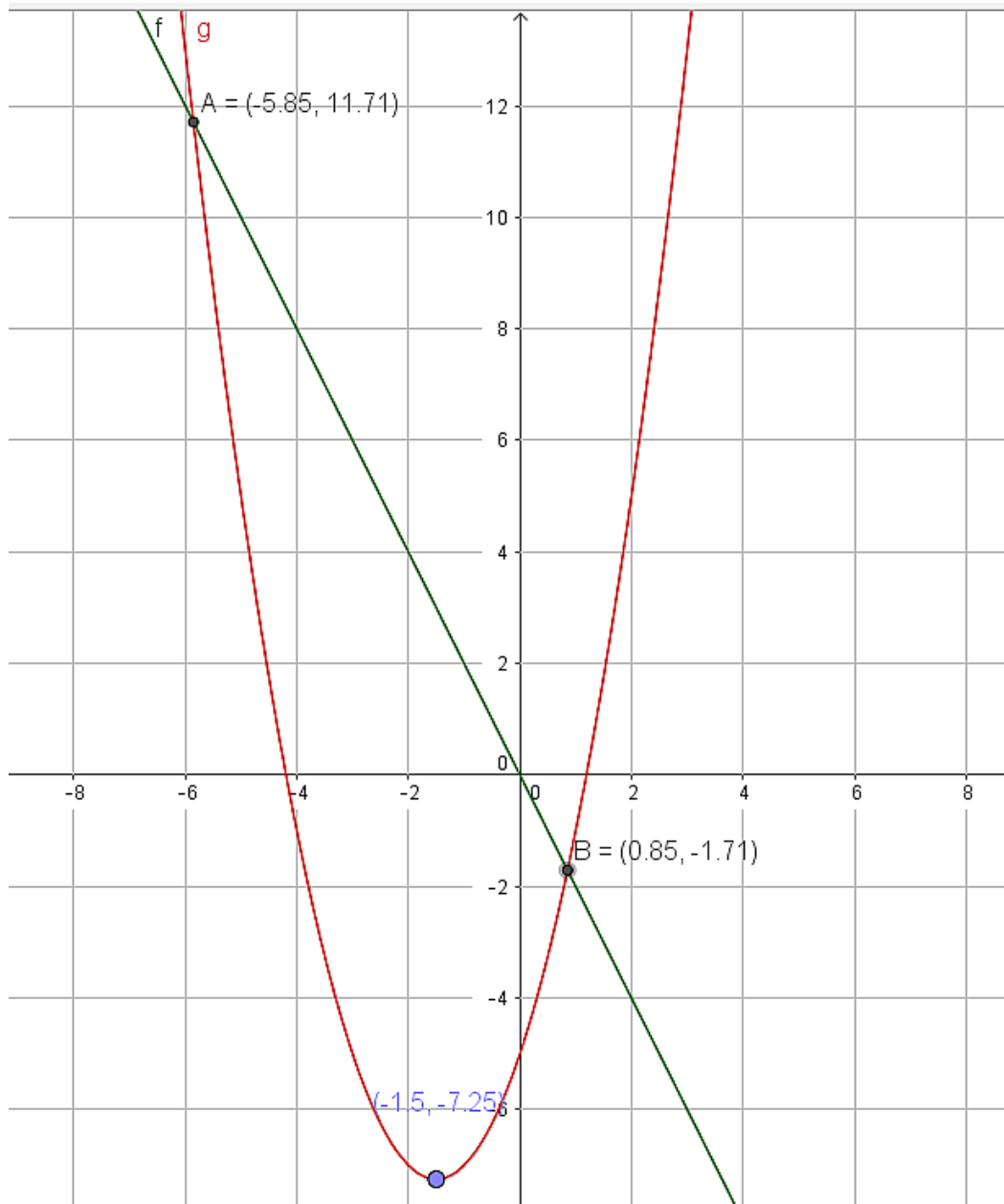
$$\text{Si } x = \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{2}, y = -2 \times x = -2 \times \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{2} = 5 - 3\sqrt{5}$$

P et D ont donc deux points d'intersection :

$$A\left(\frac{-5 - 3\sqrt{5}}{2}; 5 + 3\sqrt{5}\right) \text{ et } B\left(\frac{-5 + 3\sqrt{5}}{2}; 5 - 3\sqrt{5}\right)$$

On a **deux points d'intersections de coordonnées A(-5,85;11,71) et B(0,85 ; -1,71)**

On représente graphiquement la parabole en sachant que son sommet est d'abscisse $-b/2a$ ($-3/2$), que du coup l'ordonnée du sommet vaut $(\frac{-3}{2})^2 + 3(\frac{-3}{2}) - 5 = -7,25$. Son axe de symétrie est évidemment $x = -3/2$ et son ordonnée à l'origine vaut -5 . $a > 0$ donc sa concavité est tournée vers le haut. La droite $y = -2x$ passe par l'origine et est de pente -2



Fractions rationnelles – simplification -questions en page 30

467.	Fraction factorisée	Conditions d'existence	Fraction simplifiée	Conditions de simplification
1)	$\frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-2)}$	$-1 \neq x \neq 2$	$\frac{x+3}{x+1}$	$x \neq 2$
2)	$\frac{(u+3)(u+1)}{(u+4)(u+1)}$	$-1 \neq u \neq -4$	$\frac{u+3}{u+4}$	$u \neq -1$
3)	$\frac{(t-1)(2t+1)}{(t-3)(2t+1)}$	$3 \neq t \neq -\frac{1}{2}$	$\frac{t-1}{t-3}$	$t \neq -\frac{1}{2}$
4)	$\frac{(x+6)(x-3)}{(2x+3)(x-3)}$	$-\frac{3}{2} \neq x \neq 3$	$\frac{x+6}{2x+3}$	$x \neq 3$
5)	$\frac{(x+2)(2x-3)}{(3x+1)(2x-3)}$	$-\frac{1}{3} \neq x \neq \frac{3}{2}$	$\frac{x+2}{3x+1}$	$x \neq \frac{3}{2}$
6)	$\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x-1)}$	$-1 \neq x \neq 1$	$\frac{x^2+x+1}{x^2-1}$	—
7)	$\frac{(x+20)(x+5)}{(x+25)^2}$	$x \neq -25$	$\frac{(x+20)(x+5)}{(x+25)^2}$	—
8)	$\frac{(y+3)(y-3)}{(y-2)(y-3)}$	$2 \neq y \neq 3$	$\frac{y+3}{y-2}$	$y \neq 3$

9) Fraction factorisée : $\frac{(x+3)(x+1)x(2-x)}{(x-3)(2x+1)(x+4)(x+1)}$

Conditions d'existence : $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ 3, -\frac{1}{2}, -4, -1 \right\}$

Fraction simplifiée : $\frac{x(x+3)(2-x)}{(x-3)(2x+1)(x+4)}$

Condition de simplification : $x \neq -1$

10) Fraction factorisée : $\frac{(3x-1)(2x+3)(4x-5)(2x+1)}{(5x-2)(3x-1)(x+3)(2x+1)}$

Conditions d'existence : $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, -3, -\frac{1}{2} \right\}$

Fraction simplifiée : $\frac{(2x+3)(4x-5)}{(5x-2)(x+3)}$

Conditions de simplification : $\frac{1}{3} \neq x \neq -\frac{1}{2}$

	Conditions d'existence	Ensemble de solutions
469.		
1)	$-1 \neq x \neq 1$	$S = \left\{ \frac{5 + \sqrt{73}}{8}, \frac{5 - \sqrt{73}}{8} \right\}$
2)	$y \neq 1$	$S = \left\{ \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right\}$
3)	$2 \neq z \neq -1$	$S = \left\{ 0, \frac{3}{5} \right\}$
4)	$1 \neq u \neq 2$	$S = \left\{ 5, -\frac{1}{7} \right\}$
5)	$-a \neq x \neq a$	$S = \emptyset$

Domaines fractions rationnelles et irrationnelles -questions en page 31

TAC 5 Leçon 19

1) $y = 2x^3 + 5x^2 - x - 4$

Cette fonction est définie pour toute valeur de x .

dom $f = \mathbb{R}$.

2) $y = \frac{1-x}{2-x}$

Cette fonction est définie lorsque $2 - x$ n'est pas nul, c'est-à-dire pour $x \neq 2$.

dom $f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

3) $y = \sqrt{x-1}$

Cette fonction est définie pour $x - 1 \geq 0$, c'est-à-dire pour $x \geq 1$.

dom $f = [1, +\infty[$.

4) $y = \frac{x}{x^2 + 14x + 13}$

Cette fonction est définie lorsque $x^2 + 14x + 13$ n'est pas nul.

Recherchons les solutions de $x^2 + 14x + 13 = 0$:

$$\Delta = 14^2 - 4 \cdot 13 = 196 - 52 = 144$$

$$x' = \frac{-14 + 12}{2} = -1 \text{ et } x'' = \frac{-14 - 12}{2} = -13.$$

dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-13, -1\}$.

$$5) y = \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{2x + 3}}$$

Cette fonction est définie lorsque $2x + 3$ est positif :

$$2x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}.$$

$$\text{dom } f = \left] -\frac{3}{2}, +\infty \right[.$$

$$6) y = \sqrt[3]{x^2 + x - 2}$$

Une racine d'indice impair est toujours définie, quelle que soit la valeur du radicand.

$$\text{dom } f = \mathbb{R}.$$

TAC 6 Leçon 19

$$1) \sqrt{-x^2 - 5x - 6}$$

Cette fonction n'existe pas si $-x^2 - 5x - 6 < 0$.

Recherchons les racines de $-x^2 - 5x - 6$:

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6) = 25 - 24 = 1$$

$$x' = \frac{5+1}{-2} = -3 \quad \text{et} \quad x'' = \frac{5-1}{-2} = -2.$$

Dès lors, nous avons :

x	-3	-2
$-x^2 - 5x - 6$	$- \quad 0 \quad +$	$0 \quad -$

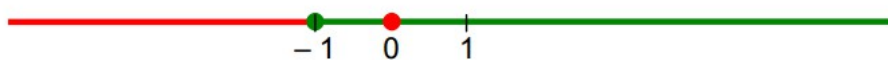
Nous en concluons : **dom $f = [-3, -2]$.**

$$2) y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$$

Cette fonction n'est pas définie si $x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$

ou si $x = 0$

Représentons en rouge les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ n'existe pas (donc en vert les valeurs que x peut prendre pour que $f(x)$ existe):



$$\text{dom } f = [-1, +\infty[\setminus \{0\}.$$

$$3) y = \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{x-2}$$

Cette fonction n'est pas définie si

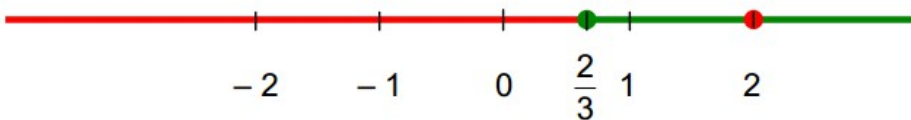
$$x+2 < 0 \quad (1) \quad \text{ou} \quad 3x-2 < 0 \quad (2) \quad \text{ou} \quad x-2 = 0 \quad (3)$$

$$(1) \quad x+2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -2$$

$$(2) \quad 3x-2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{2}{3}$$

$$(3) \quad x-2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

Représentons graphiquement ces conditions :



$$\text{Donc : } \text{dom } f = \left[\frac{2}{3}, -\infty \right[\setminus \{2\}.$$

$$4) y = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{1-x}}$$

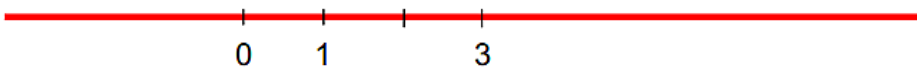
Cette fonction n'est pas définie si :

$$x-3 < 0 \quad (1) \quad \text{ou} \quad 1-x \leq 0 \quad (2)$$

$$(1) \quad x-3 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 3$$

$$(2) \quad 1-x \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1$$

Représentons graphiquement :



Constatation : aucun réel n'échappe à ces conditions.

$$\text{dom } f = \emptyset.$$

$$5) y = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt[3]{x^2 - x}}$$

Cette fonction n'est pas définie si $x^2 - x = 0$ (la racine cubique est définie quel que soit le signe du radicand).

$$\text{Or : } x^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1.$$

$$\text{Donc : } \text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

$$6) y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2 + 4x}$$

Cette fonction n'est pas définie si $1-x^2 < 0$ (1) ou $2x^2 + 4x = 0$ (2)

(1) $1 - x^2 < 0$

$1 - x^2$ est une fonction du second degré dont les racines sont -1 et 1 .

Nous avons donc :

x	-1	1
$1 - x^2$	$-$	$+$
	0	0
	$-$	$-$

D'où : $1 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x < -1$ ou $x > 1$

(2) $2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -2$.

Graphiquement :



dom $f = [-1, 1] \setminus \{0\}$.

TAC 1 lecon 20

$$1) y = \sqrt{\frac{x^2 + x - 2}{-x^2 + 4x}}$$

$$x \notin \text{dom } f \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2}{-x^2 + 4x} < 0 \quad \text{ou} \quad -x^2 + 4x = 0$$

Étudions le signe de la fraction :

- racines de $x^2 + x - 2$: $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$

$$\text{d'où } x' = \frac{-1+3}{2} = 1 \text{ et } x'' = \frac{-1-3}{2} = -2$$

- racines de $-x^2 + 4x$: $-x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(-x + 4) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4$

- Nous avons donc le tableau :

x		-2		0		1		4	
$x^2 + x - 2$	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$-x^2 + 4x$	-	-	-	0	+	+	+	0	-
fraction	-	0	+	X	-	0	+	X	-

Le domaine étant l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la fraction est supérieure ou égale à 0, nous avons : **dom f = [-2, 0[$\cup$ [1, 4[.**

$$2) y = \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt{-x^2 + 4x}}$$

$$x \notin \text{dom } f \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0 \quad (1) \quad \text{ou} \quad -x^2 + 4x \leq 0 \quad (2)$$

$$(1) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & & -2 & & 1 & \\ \hline x^2 + x - 2 & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

$$\text{D'où : } x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$$

$$(2) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & & 0 & & 4 & \\ \hline -x^2 + 4x & - & 0 & + & 0 & - \end{array}$$

$$\text{D'où : } -x^2 + 4x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ ou } x \geq 4$$

Graphiquement :



$$\text{D'où : } \text{dom } f = [-2, 1[\cup [4, \infty[.$$

$$3) y = \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{-x^2 + 4x}}$$

$$x \notin \text{dom } f \Leftrightarrow -x^2 + 4x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ ou } x \geq 4 \text{ (voir exercice 2)}$$

$$\text{D'où : } \text{dom } f =]0, 4[.$$

$$4) y = \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{-x^2 + 4x}$$

$$x \notin \text{dom } f \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0 \text{ (1) ou } -x^2 + 4x \leq 0 \text{ (2)}$$

$$(1) x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1 \text{ (voir exercice 2)}$$

$$(2) -x^2 + 4x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ ou } x \geq 4$$

D'où :



$$\text{dom } f =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[\setminus \{4\}.$$

TAC 2 leçon 20

$$1) y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-5} + 10 - x}$$

$$x \notin \text{dom } f \Leftrightarrow x - 1 < 0 \text{ (1) ou } 2x - 5 < 0 \text{ (2) ou } \sqrt{2x-5} + 10 - x = 0 \text{ (3)}$$

$$(1) x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$(2) 2x - 5 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2}$$

$$(3) \sqrt{2x-5} + 10 - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-5} = x - 10$$

$$\Rightarrow 2x - 5 = x^2 - 20x + 100$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 22x + 105 = 0$$

$$\Delta = (-22)^2 - 4 \cdot 105 = 484 - 420 = 64$$

$$x' = \frac{22+8}{2} = 15$$

$$\text{et } x'' = \frac{22-8}{2} = 7 \rightarrow \text{à rejeter car ne vérifie pas l'équation (3)}$$

Représentons graphiquement ces trois conditions :



$$\text{Dom } f = \left[\frac{5}{2}, +\infty[\setminus \{15\}.$$

$$2) y = \frac{1 - \sqrt{x+2}}{x-1 - \sqrt{25-x^2}}$$

$$x \notin \text{dom } f \Leftrightarrow x+2 < 0 \text{ (1) ou } 25-x^2 < 0 \text{ (2) ou } x-1 - \sqrt{25-x^2} = 0 \text{ (3)}$$

$$(1) x+2 < 0 \Leftrightarrow x < -2$$

$$(2) 25-x^2 < 0 \Leftrightarrow x < -5 \text{ ou } x > 5$$

En effet :

x		-5		5	
25-x ²	-	0	+	0	-

$$(3) x-1 - \sqrt{25-x^2} = 0 \Leftrightarrow x-1 = \sqrt{25-x^2}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 25 - x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 24 = 0$$

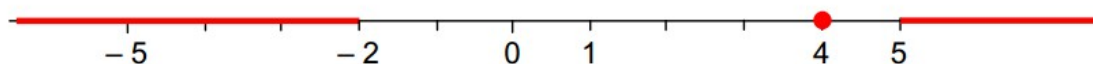
$$\Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$$

$$x' = \frac{1+7}{2} = 4$$

$$\text{et } x'' = \frac{1-7}{2} = -3 \rightarrow \text{à rejeter car ne vérifie pas (3)}$$

Représentons graphiquement ces trois conditions :



Dom $f = [-2, 5] \setminus \{4\}$.

$$3) y = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x}}{\sqrt{x+3} - x + 3}$$

$$x \notin \text{dom } f \Leftrightarrow x-1 < 0 \text{ (1) ou } 6-x < 0 \text{ (2) ou } x+3 < 0 \text{ (3) ou } \sqrt{x+3} - x + 3 = 0 \text{ (4)}$$

$$(1) x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$(2) 6-x < 0 \Leftrightarrow x > 6$$

$$(3) \quad x + 3 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x < -3}$$

$$(4) \quad \sqrt{x+3} - x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x+3} = x - 3$$

$$\Rightarrow \quad x + 3 = x^2 - 6x + 9$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 6 = 49 - 24 = 25$$

$$x' = \frac{7+5}{2} = \mathbf{6}$$

$$\text{et } x'' = \frac{7-5}{2} = \mathbf{1} \rightarrow \text{à rejeter car ne vérifie pas (4)}$$

Représentation graphique :



Dom f = [1, 6[.

$$4) \quad y = \frac{\sqrt{x^2 - x - 6}}{2 - \sqrt{x-1}}$$

$$x \notin \text{dom } f \Leftrightarrow x^2 - x - 6 < 0 \quad (1) \quad \text{ou} \quad x - 1 < 0 \quad (2) \quad \text{ou} \quad 2 - \sqrt{x-1} = 0 \quad (3)$$

$$(1) \quad x^2 - x - 6 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{-2 < x < 3}$$

En effet :

x		-2		3	
$x^2 - x - 6$	+	0	-	0	+

$$(2) \quad x - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x < 1}$$

$$(3) \quad 2 - \sqrt{x-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = \sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow \quad 4 = x - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{x = 5}$$

Représentation graphique :



Dom f = [3, +∞[\ {5}.

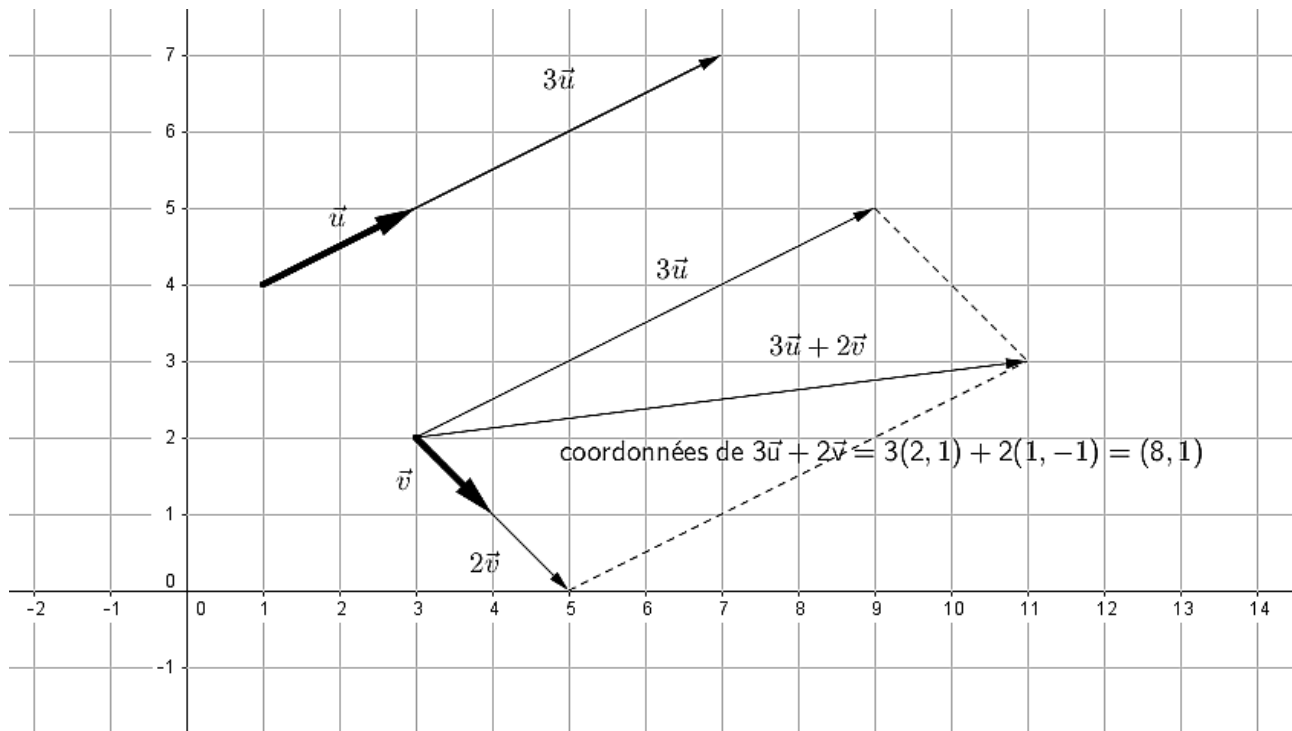
Somme et multiplication scalaire de vecteurs – solution

question en page 32

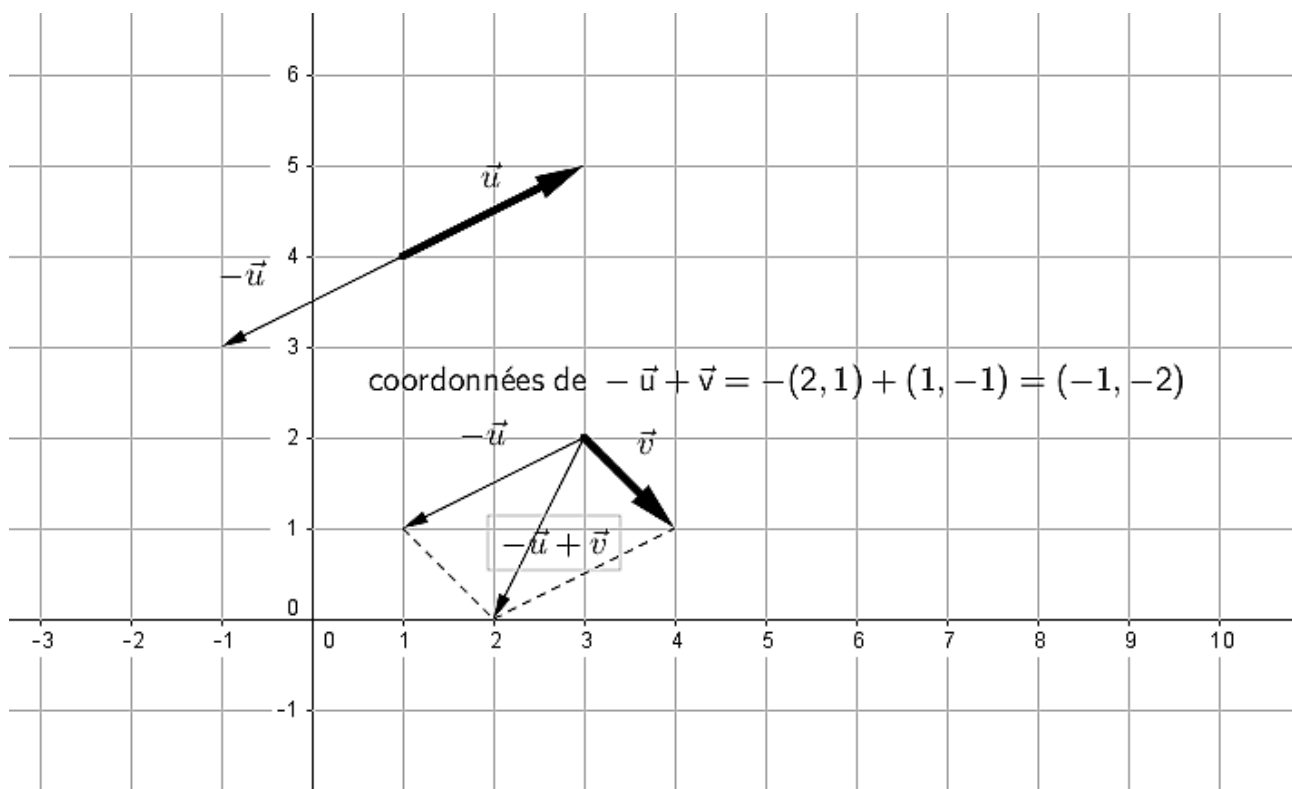
Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Déterminer géométriquement les vecteurs suivants et donner les coordonnées

$$3\vec{u} + 2\vec{v}$$



$$-\vec{u} + \vec{v}$$



$$2\vec{u} - \vec{v}$$

